

ISSN 1390-6208
e-ISSN 1390-7867
Número 1 - 2012
enero - junio

Analítica

volumen

Revista de Análisis Estadístico
Journal of Statistical Analysis

 **INEC**
instituto nacional de estadística y censos



“Constancia”

Propósito cumplido y encaminado para alcanzar el éxito.

Analítica

volumen 3

Revista de Análisis Estadístico
Journal of Statistical Analysis

ISSN 1390-6208 e-ISSN 1390-7867

Analítica * Volumen * Número 1 * enero - junio 2012 * Año 2 * Quito - Ecuador. Revista semestral de análisis estadístico del Instituto Nacional de Estadística y Censos, Ecuador. Publicación internacional bilingüe dedicada a estudios relacionados con ciencias sociales, económicas, análisis estadístico y de datos. Las ideas y opiniones expresadas en las colaboraciones, son de exclusividad de las autoras y los autores.

DIRECTORIO REVISTA

Livino Armijos

**DIRECTOR DE ESTUDIOS ANALÍTICOS
ESTADÍSTICOS**

Paúl Medina Ph.D.

EDITOR - DIRECTOR CIENTÍFICO DE LA REVISTA

Diego Chamorro Ph.D.

Université d'Evry Val d'Essonne - Francia

Silviu Glavan Ph.D.

Universidad Navarra - España

Adriana Uquillas Ph.D.

Banco Itau - Unibanco - Brazil

Ana Molina M.Sc., Ph.D.(c)

Instituto Universitario de Investigación José Ortega y Gasset - España

COMITÉ EDITORIAL INTERNACIONAL

Borys Alvarez Ph.D.

Universidad Central del Ecuador

Juan Mayorga Ph.D.

Escuela Politécnica del Ejército

Juan García M.Sc.

Universidad de Las Américas

Sergio Castillo M.Sc.

Escuela Politécnica del Ejército

COMITÉ EDITORIAL NACIONAL - ECUADOR

Lilia Quituisaca

Giovanny Quimbiulco

Andrés Merino (Edición en \LaTeX)

APOYO EDITORIAL

Fernando Romero

Marta Rodríguez

REVISIÓN DE ESTILO Y REDACCIÓN

Byron Sosa

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN PORTADA Y SEPARATAS

Indización y Registro. Analítica está indizada y/o registrada en los catálogos: Latindex • Academia.edu • Google Académico • Centro de información bibliotecario - ESPOL • Biblioteca de ingeniería eléctrica y electrónica - EPN • Biblioteca de la Universidad de Guayaquil • Scribd.

Copyright. Analítica. Se permite la reproducción total o parcial de esta revista citando la fuente.

Edición. Presentamos una re-edición de la revista Analítica volumen 3. Septiembre 2013.

El sistema tipográfico utilizado para componer esta revista fue \LaTeX , el cual es un sistema de composición orientado especialmente a la creación de libros y documentos científicos de alta calidad sobre software libre.

PRESENTACIÓN

Estimados lectores,

Me complace en presentar el tercer número de la revista Analítika del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC).

La revista Analítika, dedicada a la publicación de estudios e investigaciones en las áreas estadísticas, financieras, económicas y sociológicas, es una muestra del know-how científico de investigadores nacionales e internacionales. La presente revista contiene cuatro artículos de una excelente calidad científica. Dos de ellos, dedicados al *Análisis de la estructura ocupacional y el bono demográfico de Ecuador* y *La modelación de series económicas mediante métodos automáticos de regresión difusa*; son investigaciones netamente nacionales. Los otros dos artículos, *Herramientas matemáticas para la economía y las finanzas: el movimiento Browniano y la integral de Wiener* y *La distribución regional de los préstamos en la Argentina por sector económico, 2000-2010. Una aplicación del análisis de cluster*, son contribuciones de investigadores de Francia y Argentina, respectivamente.

Estas contribuciones internacionales son un indicador que prueba el grado de difusión que la revista Analítika está adquiriendo, no sólo dentro de Ecuador, sino también a nivel internacional. Adicionalmente, se debe mencionar que el estudio *Análisis de la estructura ocupacional y el bono demográfico de Ecuador*, fue presentado en la V Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad, organizado por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla - México y en el II Congreso Latinoamericano de Estudiantes de Estadística, II COLEEST, organizado por el Instituto Tecnológico Metropolitano (Institución Universitaria Adscrita al Municipio de Medellín), Medellín - Colombia. Cabe indicar que ambos eventos académicos fueron arbitrados, esto es, los trabajos seleccionados para su presentación, fueron examinados por expertos investigadores de reconocido prestigio internacional.

En el número anterior de la revista nos fue grato anunciar que la misma había sido indexada en LATINDEX, sistema de información sobre revistas científicas de los países de América Latina, el Caribe, España y Portugal. Con el presente número les anunciamos que la revista Analítika está postulando para ingresar en los sistemas de indexación de revistas SCIELO y REDALYC, lo que supondría un mayor reconocimiento y prestigio de la calidad científica de la revista y una mayor proyección nacional e internacional, aspecto que marcaría un hito entre las publicaciones realizadas en nuestro país.

Animo, por tanto, a nuestros investigadores nacionales, así como a investigadores internacionales a difundir sus artículos y contribuir al conocimiento científico mediante nuestra revista.

Sin más, deseando que la revista sea de su agrado.

Byron Villacís
Director Ejecutivo

CONTENIDO

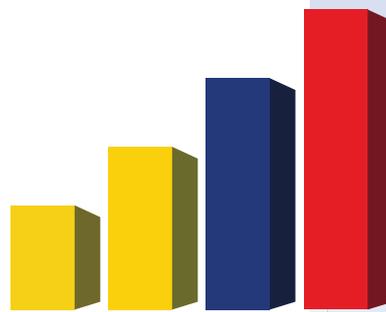
Presentación	1
Algunas herramientas matemáticas para la economía y las finanzas: el movimiento Browniano y la integral de Wiener	7
Mathematical tools for Economics and Finance: Brownian motion and the Wiener integral <i>Diego Chamorro</i>	
Modelación de series económicas mediante métodos automáticos de regresión difusa	23
Modeling of economic time series using automated fuzzy regression methods <i>Rodrigo Cajamarca y Hermann Mena</i>	
Un estudio sobre la distribución regional de los préstamos en la Argentina por sector económico, 2000-2010. Una aplicación del análisis de cluster	45
A study on the regional distribution of loans by economic sector in Argentina, 2000-2010. An application of cluster analysis <i>Adrián Gutiérrez Cabello y Andrés Salama</i>	
Estructura ocupacional y bono demográfico en el Ecuador	63
Demographic and occupational structure in Ecuador <i>Yannira Chávez y Paúl Medina</i>	
Normas para la presentación de trabajos	73
Norms for submission of papers	76
Código de ética	79

Analítica

Algunas herramientas matemáticas para la economía
y las finanzas: el movimiento Browniano y la integral
de Wiener

Mathematical tools for Economics and Finance:
Brownian motion and the Wiener integral

Diego Chamorro



www.inec.gob.ec | www.ecuadorencifras.com

Algunas herramientas matemáticas para la economía y las finanzas: el movimiento Browniano y la integral de Wiener

Mathematical tools for Economics and Finance: Brownian motion and the Wiener integral

Diego Chamorro

Laboratoire d'Analyse et de Probabilités, Université d'Evry Val d'Essonne, Paris, Francia

diego.chamorro@univ-evry.fr

Recibido: 13 de diciembre de 2011

Aceptado: 6 de febrero de 2012

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar algunos de los aspectos matemáticos que se encuentran detrás de los modelos realizados para describir fenómenos económicos y financieros. Nos concentraremos en particular en las dos herramientas de base que son el movimiento Browniano y la integral de Wiener, y mostraremos algunas de sus principales propiedades y características.

Palabras clave: Movimiento Browniano, integral de Wiener.

Abstract

This article aims to show some of the mathematical aspects behind the models used for describing economic and financial phenomena. It focuses on two basic tools: Brownian motion and the Wiener integral, showing some of their properties and characteristics.

Keywords: Brownian motion, Wiener integral.

Código JEL: C02, C19, C58.

1 Introducción

El Ecuador produce una gran variedad de materias primas –como cacao, banano, petróleo, etc.– cuyo precio se negocia en las bolsas de valores internacionales, en función de la oferta y la demanda. Diversos factores (económicos, políticos, tecnológicos, meteorológicos, etc.) intervienen en la variación de los precios de estas materias primas, de manera que tanto los productores como los compradores deben realizar detallados estudios de mercado para poder posicionarse (a corto, mediano y largo plazo) en función de estas fluctuaciones.

Un primer paso simple para tratar de comprender la evolución del precio de estas materias primas consiste en graficar las fluctuaciones pasadas a partir de las informaciones disponibles. En los gráficos de la figura 1, mostraremos

la variación del precio del cacao y del barril de petróleo durante el período 1994-2007.

Visualmente, la primera observación que podemos hacer es que la función que representa la evolución, durante los años 1994-2007, del precio de estas materias primas *no es muy regular*: presenta picos, oscilaciones y variaciones muy rápidas. Notamos también que, a partir de un cierto tiempo t (digamos enero 2000, para fijar las ideas), es muy difícil predecir, a la luz de las informaciones pasadas, el precio al instante $t + \varepsilon_1$ o $t + \varepsilon_2$ (digamos enero 2001 y enero 2002). Finalmente, podemos razonablemente suponer que la evolución *futura* tendrá un comportamiento similar (picos, oscilaciones y variaciones bruscas). Muchas de las previsiones económicas y financieras se construyen por me-

dio de modelos que buscan replicar, o reproducir, estas observaciones en el futuro. Así por ejemplo, buena parte del presupuesto general del estado ecuatoriano se basa en la evolución del precio del petróleo, y en la manera en que su venta ha sido negociada. Esta negociación se realiza sobre la base de modelos matemáticos sofisticados; por ello, es fundamental comprender las herramientas matemáticas subyacentes.

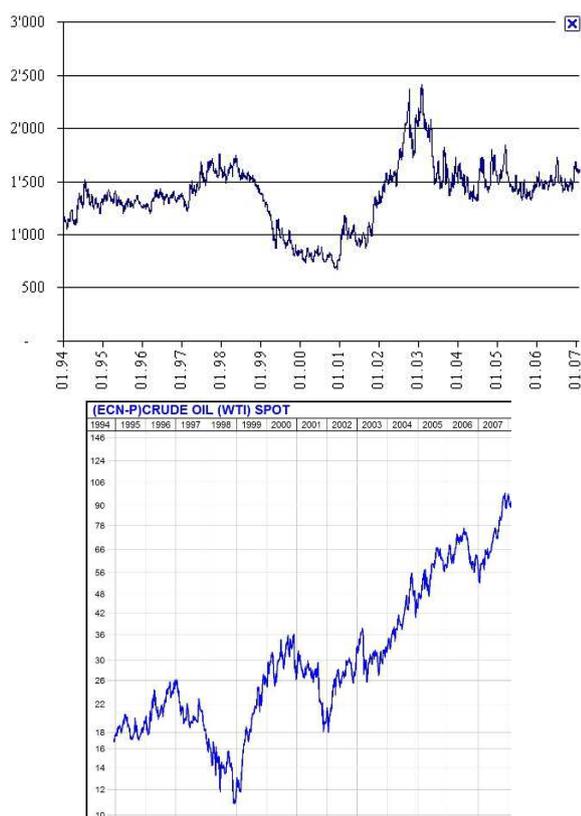


Figura 1. Fluctuaciones del precio del cacao y del petróleo durante el período 1994-2007. Fuente: internet.

Una de las primeras etapas en el uso de esta *caja de herramientas matemáticas* consiste en tratar de *reproducir o modelar*, por medio de objetos matemáticos, los gráficos anteriores. Es posible realizar esto por medio de un proceso estocástico muy particular llamado el *movimiento Browniano*.

Podemos observar que este objeto matemático comparte, al menos visualmente, muchas de las propiedades de los gráficos de la figura 1: picos, oscilaciones y variaciones bruscas. En realidad, este es un ejemplo de uno de los objetos matemáticos de base para una buena parte de las matemáticas financieras.

Pero, ¿qué es el *movimiento Browniano* y por qué este nombre? Este pequeño texto está dedicado a responder a estas inquietudes.

El plan del artículo es el siguiente. En la sección 2, explicaremos cómo obtener el movimiento Browniano estándar

a partir de caminatas aleatorias y mostraremos una serie de propiedades interesantes de este objeto matemático. En la sección 3, discutiremos algunos aspectos relativos a la integral de Riemann-Stieltjes, cuando la función contra la cual se desea integrar es justamente un movimiento Browniano. Esto conducirá a la construcción de la integral de Wiener. En todas estas secciones nuestras principales referencias son [6] y [7]. Finalmente, en la sección 4 veremos cómo intervienen estos objetos en la modelización financiera por medio de un ejemplo concreto. En el apéndice 5, se incluyen los códigos en SCILAB que permiten hacer una modelización informática de las trayectorias de un movimiento Browniano.

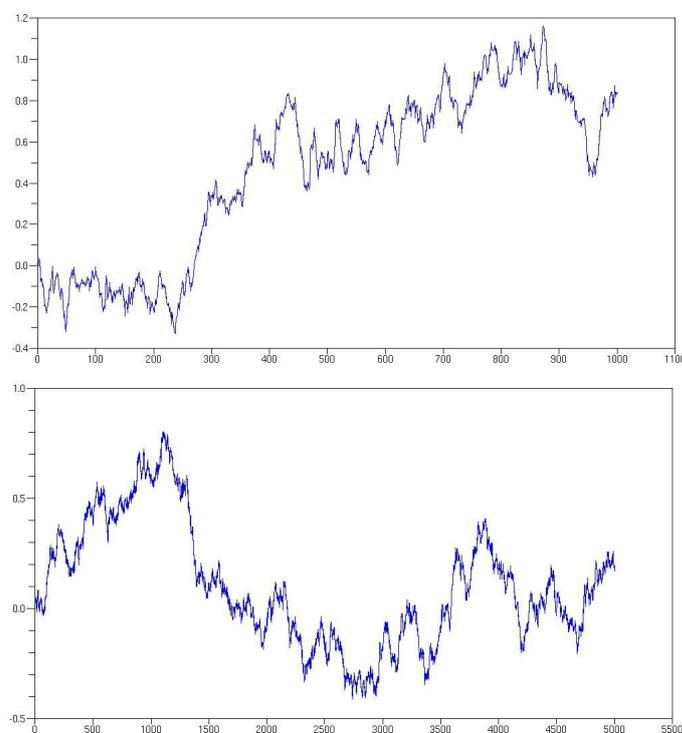


Figura 2. Dos ocurrencias de un movimiento Browniano. Fuente: código del autor.

2 El movimiento Browniano

El movimiento Browniano es un buen ejemplo de interacción entre diferentes disciplinas científicas. En efecto, en 1827, el biólogo escocés Robert Brown observa en el microscopio el movimiento errático de ciertas partículas de una planta en un líquido; esto parecía concordar con la idea, vigente en esa época, que consideraba este tipo de movimiento desordenado como consecuencia de algún “fluido vital”. Sin embargo, esta hipótesis fue rechazada por Brown cuando, en 1828, observó el mismo tipo de movimiento caótico con partículas inorgánicas de tamaño similar. Años más tarde, en 1901, el matemático francés Louis Bachelier utili-

zó este movimiento para explicar las fluctuaciones de los mercados financieros y este fue el inicio de una larga tradición en las matemáticas financieras, pero hubo que esperar al matemático norteamericano Norbert Wiener para obtener una definición matemática formal de este objeto en 1923.

2.1 Procesos estocásticos y caminatas aleatorias

El movimiento Browniano es un caso muy particular de un proceso estocástico cuya definición general damos a continuación.

DEFINICIÓN 1 (Proceso estocástico). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidades, sea (E, \mathcal{E}) un espacio medible y sea I un conjunto de índices (en la práctica se tiene $I = \mathbb{R}_+$ o $I = \mathbb{N}$). Un proceso estocástico es entonces una colección de variables aleatorias $(X_t)_{t \in I}$ definidas sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores sobre el espacio (E, \mathcal{E}) .

Demos un ejemplo que será de utilidad posteriormente. Sea $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli de ley de probabilidad dada por $\mathbb{P}(\epsilon_t = -1) = \mathbb{P}(\epsilon_t = 1) = 1/2$. Definimos entonces un proceso estocástico, llamado *caminata aleatoria*, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ X_{t+1} = X_t + \epsilon_t. \end{cases} \quad (1)$$

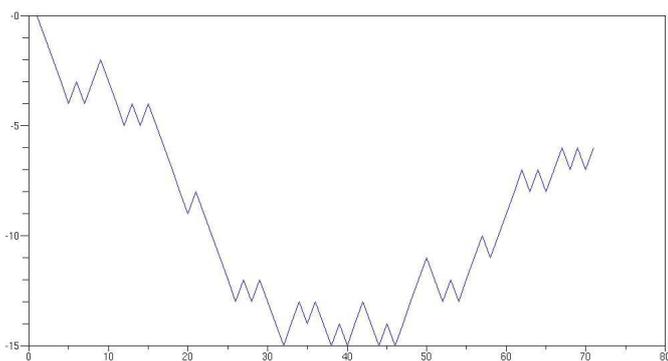


Figura 3. Una caminata aleatoria. Fuente: código del autor.

Los puntos obtenidos por medio de este proceso entre t y $t + 1$ son juntados linealmente para obtener la figura 3.

Visualmente podemos apreciar cierta similitud entre el gráfico de esta caminata aleatoria y los de la figura 1. Pero esta modelización deja mucho que desear; por esta razón, vamos a imponer ciertas condiciones que harán que el objeto matemático correspondiente se acerque más a las fluctuaciones del precio de las materias primas observadas.

Estas condiciones pueden parecer arbitrarias, pero serán justificadas al *construir* el movimiento Browniano.

DEFINICIÓN 2 (Movimiento Browniano estándar). Un proceso estocástico $B(t, \omega)$ es un movimiento Browniano estándar si satisface las siguientes condiciones:

- 1) El proceso comienza en cero: $\mathbb{P}(\omega : B(0, \omega) = 0) = 1$
- 2) Para todo $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es normalmente distribuida con media cero y de varianza $t - s$:

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s),$$

es decir, para todo $a < b$, se tiene:

$$\mathbb{P}(a \leq B(t) - B(s) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

- 3) El proceso $B(t, \omega)$ tiene incrementos independientes: para todo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables aleatorias

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}),$$

son independientes.

- 4) Casi todos los caminos de $B(t, \omega)$ son funciones continuas:

$$\mathbb{P}(\omega : B(\cdot, \omega) \text{ es continua}) = 1.$$

Por comodidad, el proceso estocástico $B(t, \cdot)$ será notado $B(t)$ o B_t .

DEFINICIÓN 3. Una realización para un ω fijado $t \mapsto B(t, \cdot)$ de un movimiento Browniano es llamada una Trayectoria.

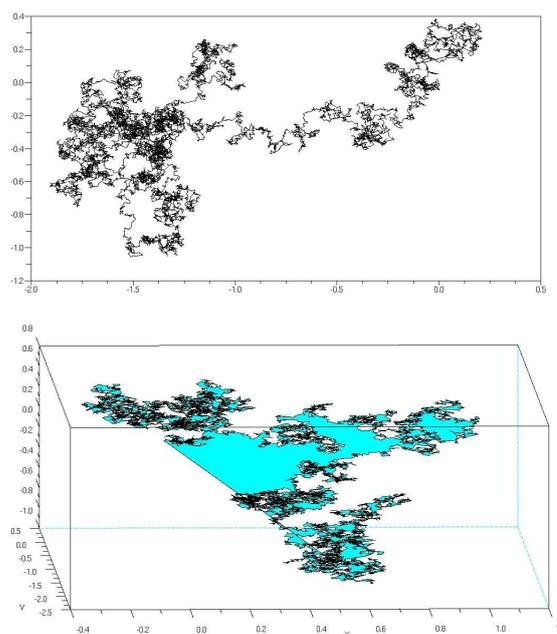


Figura 4. Dos trayectorias de un movimiento Browniano en 2D y 3D. Fuente: código del autor.

2.2 Construcción del Movimiento Browniano

La caminata aleatoria definida en la página anterior cumple con algunos de los puntos anteriores pero, en particular, no cumple con la condición 2). Sin embargo la idea de caminatas aleatorias es muy útil para una construcción simple y rápida del movimiento Browniano.

Empecemos con una variante del proceso estocástico dado en (1) y consideremos una caminata aleatoria que empieza en el punto cero, con saltos de amplitud a y $-a$ de igual probabilidad de ocurrencia en los tiempos $\delta, 2\delta, \dots$ en donde s, δ son dos números positivos. Más formalmente, sea $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = -a) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = a) = \frac{1}{2}.$$

Construimos a partir de esto una caminata aleatoria $Y_{a,\delta}$ escribiendo

$$\begin{cases} Y_{a,\delta}(0) = 0, \\ Y_{a,\delta}(n\delta) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n. \end{cases} \quad (2)$$

Luego, para todo tiempo t tal que $n\delta < t < (n+1)\delta$ juntamos linealmente los extremos de esta manera:

$$Y_{a,\delta}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{a,\delta}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{a,\delta}((n+1)\delta).$$

La cantidad $Y_{a,\delta}(t)$ representa la posición de la caminata aleatoria en el tiempo t ; y es a partir de esta caminata aleatoria que vamos a obtener el movimiento Browniano haciendo tender a y δ hacia cero, es decir $B(t) = \lim_{a,\delta \rightarrow 0} Y_{a,\delta}(t)$. Pero antes de lanzarnos en el cálculo de este límite, conviene estudiar la función característica:

$$\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos a ver que muchas de las propiedades del proceso estocástico límite se pueden obtener al comprender esta función característica.

Por simplicidad, vamos a suponer que $t = n\delta$, de manera que $n = t/\delta$; esto será suficiente para nuestros propósitos inmediatos. Por construcción de $Y_{a,\delta}$ y por las propiedades de las variables aleatorias $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i\lambda \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \right) \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} [\exp(i\lambda \varepsilon_j)] \\ &= \mathbb{E} [\exp(i\lambda \varepsilon_1)]^n \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i\lambda a} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda a} \right)^n \\ &= \cos(\lambda a)^n \\ &= \cos(\lambda a)^{t/\delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

A partir de este pequeño cálculo, observamos que, para λ y t fijados, el límite de la cantidad $\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))]$ cuando a y δ tienden independientemente hacia cero no existe. Para verificarlo basta hacer un desarrollo limitado de la cantidad $\cos(\lambda a)^{t/\delta}$: en efecto, si a y δ son muy pequeños se tiene

$$\cos(\lambda a)^{t/\delta} \approx 1 - \frac{t\lambda^2 a^2}{2\delta}.$$

Vemos por ejemplo que, si $a \approx x$ y si $\delta \approx x^3$, entonces hay un verdadero problema en la fórmula anterior si se hace $a, \delta \rightarrow 0$. Esto muestra que se debe fijar con cuidado la relación entre a y δ para que el límite exista. Sin embargo, la existencia del límite de la cantidad $\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))]$ cuando $a, \delta \rightarrow 0$ no es suficiente para obtener una caminata aleatoria con las propiedades buscadas. Si fijamos ahora a y δ tales que $\frac{a^2}{\delta} \rightarrow 0$ si $\delta \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\lim_{a,\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] = 1.$$

Esto implica que el proceso estocástico $X(t)$ definido por $X(t) = \lim_{a,\delta \rightarrow 0} Y_{a,\delta}(t)$ existe, pero se tiene que $X(t) \equiv 0$.

Para obtener el movimiento Browniano es conveniente, antes de hacer un desarrollo limitado, escribir $x = \ln(\cos(\lambda a)^{t/\delta})$. Se tiene entonces que $x = \frac{t}{\delta} \ln(\cos(\lambda a))$ y, si a es muy pequeño, tenemos $\cos(\lambda a) \approx 1 - \frac{\lambda^2 a^2}{2}$. Ahora, dado que $\ln(1 + \tau) \approx \tau$, si τ es pequeño podemos escribir

$$\ln(\cos(\lambda a)^{t/\delta}) \approx \ln(1 - \frac{\lambda^2 a^2}{2}) \approx -\frac{\lambda^2 a^2}{2}.$$

De esta forma observamos que, si a y δ son muy pequeños, se tiene $x \approx -\frac{t\lambda^2 a^2}{2\delta}$ y entonces $\cos(\lambda a)^{t/\delta} \approx e^{-\frac{t\lambda^2 a^2}{2\delta}}$. Por lo tanto, volviendo a la expresión (3), si a y δ son muy pequeños, obtenemos la aproximación

$$\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] \approx e^{-\frac{t\lambda^2 a^2}{2\delta}}.$$

En particular si fijamos $a^2 = \delta$ entonces podemos escribir

$$\lim_{a,\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El lector observará que esta función característica corresponde a una distribución gaussiana centrada de varianza igual a t . Estas observaciones nos permiten enunciar nuestro primer teorema:

TEOREMA 1. *Sea $Y_{a,\delta}(t)$ una caminata aleatoria que empieza en cero, con saltos equiprobables de amplitud a y $-a$ en los tiempos $\delta, 2\delta, \dots$. Si suponemos que $a^2 = \delta$, entonces para todo tiempo $t \geq 0$ el límite*

$$B(t) = \lim_{a,\delta \rightarrow 0} Y_{a,\delta}(t) \quad \text{existe.}$$

Se tiene además que

$$\mathbb{E} [e^{i\lambda B(t)}] = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

y el proceso estocástico $B(t)$ es un movimiento Browniano estándar.

Demostración. Con los cálculos de las líneas precedentes hemos verificado la existencia del proceso estocástico $B(t)$ y la validez de la fórmula (4). Por construcción de la caminata aleatoria $Y_{a,\delta}(t)$, se tiene que el proceso estocástico $B(t)$ comienza en cero. Para verificar que la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es normalmente distribuida con media cero y de varianza $t - s$, aplicamos la fórmula (4) para obtener

$$\mathbb{E} \left[e^{i\lambda[B(t)-B(s)]} \right] = e^{-\frac{(t-s)\lambda^2}{2}}$$

de donde se deduce que $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. La independencia de los incrementos es una consecuencia de la independencia de las variables aleatorias $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que ayudaron a construir el proceso estocástico $B(t)$. Con esto hemos comprobado los puntos 1), 2) y 3) de la definición 2. Pero falta el punto 4). La continuidad del movimiento Browniano es un poco más delicada y, para ello, necesitaremos introducir la siguiente noción y verificar un resultado dado en la proposición 1:

DEFINICIÓN 4. Sean $(X_t)_{t \in I}$ y $(\tilde{X}_t)_{t \in I}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidades. Decimos que \tilde{X}_t es una modificación de X_t , si para todo $t \in I$ se tiene la identidad

$$X_t = \tilde{X}_t \quad \text{casi en todas partes.}$$

PROPOSICIÓN 1 (Teorema de Kolmogorov-Čentsov). Sean $(X_t)_{t \in [0,1]^d}$ un proceso estocástico y tres constantes estrictamente positivas γ, c, ϵ tales que

$$\mathbb{E} [|X_t - X_s|^\gamma] \leq c |t - s|^{d+\epsilon}.$$

Entonces, existe una modificación \tilde{X}_t de X_t tal que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sup_{s \neq t} \frac{|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|}{|t - s|^\alpha} \right)^\gamma \right] < +\infty \quad (5)$$

para todo $\alpha \in [0, \epsilon/\gamma]$.

Demostración de la proposición 1. Para $m \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto D_m como la colección de d -uplas $s = (2^{-m}k_1, \dots, 2^{-m}k_d)$, en donde cada k_i es un entero en el intervalo $[0, 2^m]$, y definimos $D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$. Definimos además el conjunto Δ_m de parejas $(s, t) \in D_m$ tales que $|s - t| = 2^{-m}$. Notemos que hay un poco menos que $2^{(m+1)d}$ de este tipo de parejas. también diremos para todo $s, t \in D$ que $s \leq t$ si cada componente de s es menor o igual que el componente correspondiente de t .

Definamos ahora $K_j = \sup_{(s,t) \in \Delta_m} |X_t - X_s|$. La hipótesis de la proposición nos asegura que existe una constante κ tal que

$$\mathbb{E}[K_j^\gamma] \leq \sum_{(s,t) \in \Delta_m} \mathbb{E} [|X_t - X_s|^\gamma]$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^{(m+1)d} \times c 2^{-m(d+\epsilon)} \\ &= \kappa 2^{-m\epsilon}. \end{aligned}$$

Por construcción del conjunto D , para todo punto $s \in D$ existe una sucesión creciente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ tal que $s_n \in D_n$ y tal que $s_n \leq s$ con $s_n = t$ a partir de un cierto n suficientemente grande. Sea ahora $s, t \in D$ con la condición que $|s - t| \leq 2^{-m}$. Se tiene entonces o que $s_m = t_m$ o que $(s_m, t_m) \in \Delta_m$ y en ambos casos podemos escribir:

$$X_s - X_t = \sum_{j=m}^{+\infty} (X_{s_{j+1}} - X_{s_j}) + X_{s_m} - X_{t_m} + \sum_{j=m}^{+\infty} (X_{t_j} - X_{t_{j+1}})$$

en donde las series precedentes son en realidad sumas finitas. De esta identidad se deduce que

$$|X_s - X_t| \leq K_m + 2 \sum_{j=m+1}^{+\infty} K_j \leq 2 \sum_{j=m}^{+\infty} K_j.$$

Definimos ahora el conjunto $M_\alpha = \sup_{s,t \in D, s \neq t} \left\{ \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\alpha} \right\}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} M_\alpha &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{(m+1)\alpha} \sup_{|t-s| \leq 2^{-m}} |X_t - X_s| : s, t \in D, s \neq t \right\} \\ &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{(m+1)\alpha+1} \sum_{j=m}^{+\infty} K_j \right\} \\ &\leq 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j\alpha} K_j. \end{aligned}$$

Ahora, para $\gamma \geq 1$ y para $\alpha \leq \epsilon/\gamma$, obtenemos con $\kappa' = 2^{\alpha+1} \kappa^{1/\gamma}$ que

$$\|M_\alpha\|_{L^\gamma} \leq 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j\alpha} \|K_j\|_{L^\gamma} \leq \kappa' \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(\alpha-\epsilon/\gamma)} < +\infty,$$

en donde hemos notado $\|\cdot\|_{L^\gamma}$ la norma usual en los espacios L^γ .

Si $0 < \gamma < 1$, el mismo razonamiento se aplica a la cantidad $\mathbb{E}[M_\alpha^\gamma]$ en lugar de $\|M_\alpha\|_{L^\gamma}$. Se obtiene entonces que para casi todo ω , X_t es uniformemente continuo sobre D y podemos definir sin ambigüedad

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega).$$

Finalmente, aplicando el Lema de Fatou a este límite, y como se tiene que $\tilde{X}_t = X_t$ casi en todas partes, se obtiene que \tilde{X}_t es la modificación buscada. \square

Fin de la demostración del teorema 1. Se tiene, por las propiedades anteriormente verificadas, que $B(t) - B(s) \sim$

$\mathcal{N}(0, t-s) = \sqrt{t-s} \mathcal{N}(0, 1)$. Se obtiene entonces, para todo entero $n \geq 1$, que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B(t) - B(s)|^{2n}] &= \mathbb{E}[|\sqrt{t-s} \mathcal{N}(0, 1)|^{2n}] \\ &= |t-s|^n \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^{2n}]. \end{aligned}$$

Calculemos ahora $\mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^{2n}]$, para ello estudiamos la función característica de la variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)^{2n}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i\lambda \mathcal{N}(0, 1)^{2n}}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (i)^k \lambda^k G^{2nk}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (i)^k \lambda^k \mathbb{E}[G^{2nk}], \end{aligned}$$

en donde G es una gaussiana normalizada. Dado que todos los momentos impares de las gaussianas son nulos, se tiene que solo los k momentos pares intervienen en esta suma. Así, se obtiene que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda \mathcal{N}(0, 1)^{2n}}] = e^{-c_n \frac{\lambda^2}{2}}$$

y, por lo tanto, que $\mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^{2n}] = c_n$. Es decir que se verifica la hipótesis de la proposición 1 con $\gamma = 2n$ y $\epsilon = n - 1$:

$$\mathbb{E}[|B(t) - B(s)|^{2n}] = c_n |t-s|^n. \quad (6)$$

Entonces, la expresión (5) implica que existe una modificación $\tilde{B}(t)$ de $B(t)$ que es continua y por lo tanto resulta que

$$\mathbb{P}(\omega : B(\cdot, \omega) \text{ es continua}) = 1.$$

Con esto se tiene el punto 4) de la definición de movimiento Browniano y terminamos, de esta manera, la demostración del teorema 1. \square

2.3 Algunas propiedades del movimiento Browniano

Una vez que hemos construido el movimiento Browniano estándar y que se dispone de la identidad $\mathbb{E}[e^{i\lambda B(t)}] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$, es posible determinar una serie de propiedades que detallamos a continuación:

PROPOSICIÓN 2. Sea $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un movimiento Browniano estándar. Entonces

- 1) para todo $t > 0$, $B(t)$ es una variable aleatoria normalmente distribuida de media cero y de varianza t .
- 2) para todo $s, t \geq 0$, se tiene $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min\{s, t\}$.

Demostración. Por el primer punto de la definición 2 se tiene que $B(t) = B(t) - B(0)$ mientras que, por el segundo punto, se tiene que $B(t) - B(0) \sim \mathcal{N}(0, t)$ de donde se deduce la primera aserción de esta proposición. Nótese en particular que se tiene la fórmula

$$\text{Var}(B(t)) = \mathbb{E}[B(t)^2] = t,$$

puesto que $\mathbb{E}[B(t)] = 0$.

Para mostrar la segunda parte podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $s < t$; entonces por los puntos 2) y 3) de la definición 2 podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(s)B(t)] &= \mathbb{E}[B(s)(B(t) - B(s)) + B(s)^2] \\ &= \mathbb{E}[B(s)(B(t) - B(s))] + \mathbb{E}[B(s)^2] \\ &= \mathbb{E}[B(s)]\mathbb{E}[B(t) - B(s)] + \mathbb{E}[B(s)^2] \\ &= 0 + s = s; \end{aligned}$$

es decir que $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min\{s, t\}$. \square

PROPOSICIÓN 3. Sea $t_0 \geq 0$ un real. Entonces, el proceso estocástico $\tilde{B}(t)$ definido por la fórmula

$$\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$$

es un movimiento Browniano estándar.

Demostración. Hay que verificar que el proceso estocástico $\tilde{B}(t)$ cumple con las cuatro condiciones de la definición 2.

Vemos, pues, que se tienen los puntos 1) y 4). Ahora, para todo $s < t$ escribimos

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = B(t + t_0) - B(s + t_0), \quad (7)$$

pero como $B(t)$ es un movimiento Browniano se tiene que $B(t + t_0) - B(s + t_0)$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza $(t + t_0) - (s + t_0) = t - s$. De esta manera se obtiene que $\tilde{B}(t)$ verifica la condición 2). Finalmente, para el punto 3), podemos suponer que $t_0 > 0$; en ese caso, para toda sucesión $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ se tiene $0 < t_0 < t_0 + t_1 < \dots < t_0 + t_n$. Aplicamos entonces el punto 3) a $B(t)$ para obtener que $B(t), B(t_k + t_0) - B(t_{k-1} + t_0), k = 1, \dots, n$ son variables aleatorias independientes. Por la fórmula (7) se tiene entonces que las variables aleatorias $\tilde{B}(t_k) - \tilde{B}(t_{k-1})$ son independientes de manera que se obtiene la condición 3). \square

PROPOSICIÓN 4. Para todo número real $\lambda > 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = B(\lambda t) / \sqrt{\lambda}$ es un movimiento Browniano estándar.

Demostración. Las condiciones 1), 3) y 4) son inmediatas. Para verificar 2), observamos que para todo $s < t$ se tiene

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B(\lambda t) - B(\lambda s)).$$

Esto muestra que la variable aleatoria $\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)$ es normalmente distribuida, de media cero y de varianza $\frac{1}{\lambda}(\lambda t - \lambda s) = t - s$. De donde se deduce la condición 2) y se termina la verificación de esta proposición. \square

Este hecho nos explica que si agrandamos el movimiento Browniano por medio de una lupa, seguiremos observando, a todas las escalas, un movimiento Browniano.

Nos interesamos ahora en estudiar la *regularidad* de este objeto matemático. Por definición, sabemos que es un objeto continuo, pero ¿es posible decir un poco más? Para hacernos una idea de la situación, vamos a volver a la caminata aleatoria $Y_{a,\delta}$ definida en (2) que nos ha servido para la construcción del movimiento Browniano. En efecto, si fijamos por un instante a y δ , vemos que entre cada etapa de la caminata aleatoria $Y_{a,\delta}$ se tiene que la pendiente es igual, en valor absoluto, a $\frac{a}{\delta}$. Dado que, para la obtención del movimiento Browniano, hemos fijado $a = \sqrt{\delta}$, la pendiente entre estas dos etapas de la caminata aleatoria es del orden de $\frac{1}{\sqrt{\delta}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty$. Esto muestra, heurísticamente, que es posible que el movimiento Browniano no sea un objeto derivable. En este sentido tenemos el importante teorema siguiente:

TEOREMA 2 (Paley, Wiener, Zygmund). *Sea $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un movimiento Browniano estándar, entonces, para todo $\omega \in \Omega$, las trayectorias $B_t(\omega)$ no son derivables en ningún punto.*

Este resultado, demostrado en 1933, es de gran importancia pues brinda un ejemplo de funciones que no son derivables en ningún punto pero sobre todo muestra que estas funciones no son únicamente artefactos matemáticos, sino que aparecen en las observaciones de la naturaleza. La demostración de este teorema puede encontrarse en [6].

Tenemos pues una función continua que no es derivable en ningún punto es decir que para una trayectoria dada se tiene que $B(t, \cdot) \notin C^1(\mathbb{R})$. Vamos a ver que es posible detallar un poco más la noción de regularidad y para ello introducimos el siguiente espacio de funciones.

DEFINICIÓN 5 (Espacios de Hölder). *Sea $0 < \alpha < 1$. Definimos el espacio de Hölder homogéneo $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R})$ como el conjunto de funciones (módulo las constantes) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que la cantidad*

$$\|f\|_{\dot{C}^\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad \text{sea finita.} \quad (8)$$

Los espacios de Hölder $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R})$ con $0 < \alpha < 1$ son generalizaciones fraccionarias de los espacios de funciones derivadas continuas $C^k(\mathbb{R})$ con $k \in \mathbb{N}$.

Por el teorema 1 sabemos que el movimiento Browniano B_t admite una modificación que pertenece al espacio $C^0(\mathbb{R})$ de funciones continuas, pero por el teorema 2 se tiene que $B_t \notin C^1(\mathbb{R})$. Gracias a los espacios de Hölder podemos afinar esta información:

TEOREMA 3. *Sea $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un movimiento Browniano estándar, entonces existe una modificación $\tilde{B}(t)$ continua de $B(t)$ tal que casi todas sus trayectorias poseen una regularidad Hölderiana de orden α con $0 < \alpha < 1/2$.*

Demostración. La verificación de este hecho es inmediata una vez que se tiene el teorema de Kolmogorov-Č enunciado en la proposición 1. En efecto, dado que se tiene la fórmula (6):

$$\mathbb{E}[|B(t) - B(s)|^{2n}] = c_n |t - s|^n$$

se puede aplicar el teorema de Kolmogorov-Čentsov con $\gamma = 2n$ y $\epsilon = n - 1$, entonces se obtiene que el movimiento Browniano $B(t)$ admite una modificación continua que es Hölder regular con índice de regularidad $0 < \alpha < \frac{n-1}{2n}$. Así se obtiene que el movimiento Browniano posee una regularidad Hölderiana de orden $0 < \alpha < 1/2$. \square

OBSERVACIÓN 1. Es importante notar que se tiene la estimación estricta en el índice de regularidad y que se puede mostrar que el movimiento Browniano estándar no es Hölder regular de orden $1/2$.

3 Integral de Wiener

El objetivo de esta sección es dar un sentido a la siguiente expresión:

$$I(f) = \int_a^b f(t) dB(t, \omega), \quad (9)$$

en donde f es una función determinística (que no depende de ω) y $B(t, \omega)$ es un movimiento Browniano estándar. Antes de dar los detalles de la construcción de esta integral, llamada la integral de Wiener, vamos a mostrar algunos puntos que hay que tener en consideración.

Empecemos con dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y acotadas. Recordemos que f es Riemann-Stieltjes con respecto a g , si el siguiente límite existe:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(x_i) - g(x_{i-1})) \quad (10)$$

en donde $\Delta_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con la convención $a = x_0 < \dots < x_n = b$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ y τ_i es un punto de evaluación dentro del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Sin embargo, hay que tener un poco de cuidado con la definición de la integral $\int_a^b f(x) dg(x)$. Consideremos el caso particular en donde $f = g$; notaremos I_n y D_n las sumas de Riemann correspondientes con los puntos de evaluación $\tau_i = x_{i-1}$ y $\tau_i = x_i$ respectivamente:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$D_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) (f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Calculamos ahora $D_n - I_n$ y $D_n + I_n$, para obtener

$$D_n - I_n = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D_n + I_n &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(f(x_i)^2 - f(x_{i-1})^2) \\ &= f(b)^2 - f(a)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

El límite cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ de la expresión (11) es llamada la *variación cuadrática* de la función f . Evidentemente, se tiene $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} D_n \neq \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} I_n$ si y solo si la variación cuadrática de f es diferente de cero. En este caso, la definición de la integral (10) es problemática pues el resultado *depende* del punto de evaluación τ_i . Esto muestra que hay que tener un poco de cuidado cuando se trata de definir una integral por medio de la expresión (10). Existen varias formas de contornar esta dificultad aparente y, en este artículo, nos concentraremos en la integral de Wiener.

3.1 Construcción de la integral de Wiener

Empezamos, pues, la construcción de la integral de Wiener con funciones simples $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(x)$, en donde $t_0 = a$ y $t_n = b$. Definimos entonces

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i (B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)). \quad (13)$$

Se tiene, evidentemente, $I(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha I(f)(\omega) + \beta I(g)(\omega)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f, g dos funciones simples, de manera que el operador I es lineal.

LEMA 1. Para una función simple f , la variable aleatoria $I(f)$ es una gaussiana con media cero y de varianza

$$\mathbb{E}[I(f)^2] = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Demostración. Recordemos que una combinación lineal de variables aleatorias gaussianas independientes sigue siendo una variable aleatoria gaussiana. Por la construcción dada en (13), se tiene que $I(f)$ es una variable aleatoria gaussiana.

Verifiquemos que la media de $I(f)$ es nula. Para ello escribimos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(f)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right] \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (\mathbb{E}[B_{t_i}] - \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}]) = 0 \end{aligned}$$

por las propiedades del movimiento Browniano dadas en la proposición 2. Calculemos ahora la varianza; por definición, tenemos

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[I(f)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)^2\right]. \quad (14)$$

Observemos ahora dos puntos:

1. Primeramente:

$$\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] = t_i - t_{i-1}. \quad (15)$$

En efecto, desarrollando esta expresión tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] &= \mathbb{E}[B_{t_i}^2] - 2\mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_{i-1}}] + \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}^2] \\ &= t_i - 2\min\{t_i, t_{i-1}\} + t_{i-1} \\ &= t_i - t_{i-1}. \end{aligned}$$

2. Además se tiene, cuando $i \neq j$, que

$$\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_j})^2\right] = 0.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $j < i$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_j})^2\right] &= \mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_j}] - \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}B_{t_j}] \\ &\quad - \mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_{j-1}}] + \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}] \\ &= \min\{t_i, t_j\} - \min\{t_{i-1}, t_j\} \\ &\quad - \min\{t_i, t_{j-1}\} + \min\{t_{i-1}, t_{j-1}\}. \end{aligned}$$

Lo que permite obtener el resultado deseado.

Finalmente, gracias a estas dos observaciones, tenemos que la ecuación (14) se reduce a

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f^2(t) dt,$$

lo que termina la demostración del lema. \square

Vamos ahora a aplicar la integral definida con la fórmula (13) a funciones más generales que las funciones simples. Para ello introducimos un poco de notaciones y consideraremos $L^2(\Omega)$ el espacio de Hilbert formado por el conjunto de variables aleatorias de cuadrado integrable definidas sobre Ω . Para este espacio de Hilbert, el producto interno estará dado por la fórmula:

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]. \quad (16)$$

Sea ahora f una función determinista tal que $f \in L^2([a, b])$ y fijemos una sucesión de funciones simples $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $L^2[a, b]$. Por el lema 1 se tiene que la sucesión $(I(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$, de manera que converge en $L^2(\Omega)$. Esto nos permite entonces definir la siguiente cantidad

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (17)$$

Aquí debemos verificar que la fórmula dada por (17) está bien definida. Para ello vamos a mostrar que el límite de esta expresión es independiente de la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerada. Sea entonces $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ otra sucesión

tal que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ en $L^2([a, b])$. Escribimos, gracias al lema 1

$$\mathbb{E}[|I(f_n) - I(g_n)|^2] = \mathbb{E}[|I(f_n - g_n)|^2] = \int_a^b (f_n - g_n)^2 dt.$$

Puesto que

$$\int_a^b (f_n - g_n)^2 dt \leq 2 \int_a^b (f_n - f)^2 + (g_n - f)^2 dt$$

y que cada una de estas partes tiende a cero cuando $n \rightarrow +\infty$, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(g_n), \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

y esto muestra que no hay ambigüedad al considerar $I(f)$.

DEFINICIÓN 6. Sea $f \in L^2([a, b])$, el límite $I(f)$ definido por la ecuación (17) es la integral de Wiener de f . Notaremos la integral de Wiener de f de la siguiente forma:

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t) dB(t) \right) (\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (18)$$

La integral de Wiener es entonces un operador definido de $L^2([a, b])$ en $L^2(\Omega)$.

Observemos que la integral de Wiener es un operador lineal: en efecto, para todo $f, g \in L^2([a, b])$ se tiene, por construcción, que $I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$.

TEOREMA 4. Para todo $f \in L^2([a, b])$, la integral de Wiener $\int_a^b f(t) dB(t, \omega)$ es una variable aleatoria gaussiana de media cero y de varianza igual a $\|f\|_{L^2}^2$, es decir:

$$\int_a^b f(t) dB(t, \omega) \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_{L^2}^2). \quad (19)$$

Demostración. Por el lema 1, se tiene esta propiedad cuando f es una función simple. Para una función general de $L^2([a, b])$, se obtiene el resultado como consecuencia del siguiente hecho general: si X_n es una variable aleatoria gaussiana de media μ_n y de varianza σ_n^2 y, si X_n converge en $L^2(\Omega)$ hacia una variable aleatoria X , entonces X es una variable aleatoria gaussiana de media $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ y de varianza $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2$. \square

Demos un par de ejemplos de cálculo de integrales de Wiener.

- Sea $f \equiv 1$ sobre el intervalo $[0, 1]$, entonces,

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dB(t) = \int_0^1 dB(t)$$

es una variable aleatoria gaussiana, de media cero y de varianza igual a 1, es decir $I(f) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- Sea $g(t) = t^2$ sobre $[1, 2]$, entonces

$$I(f) = \int_1^2 g(t) dB(t) = \int_1^2 t dB(t)$$

es una variable aleatoria gaussiana, de media cero y de varianza igual a $\int_1^2 t^2 dt = 7/3$; es decir $I(f) \sim \mathcal{N}(0, 7/3)$.

Estudiemos ahora la relación entre la integral de Wiener y la estructura de los espacios de Hilbert subyacentes.

PROPOSICIÓN 5. Sean $f, g \in L^2([a, b])$ dos funciones, entonces

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (20)$$

En particular, si f y g son ortogonales; entonces, las variables aleatorias gaussianas $I(f)$ y $I(g)$ son independientes.

Demostración. Escribimos, por un lado, que:

$$\mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] = \mathbb{E}[(I(f + g))^2] = \int_a^b (f + g)^2 dt$$

por linealidad de la integral y por el lema 1. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] &= \int_a^b f^2(t)dt + 2 \int_a^b f(t)g(t)dt \\ &\quad + \int_a^b g^2(t)dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] &= \mathbb{E}[I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2] \\ &= \mathbb{E}[I(f)^2] + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] \\ &\quad + \mathbb{E}[I(g)^2] \\ &= \int_a^b f^2(t)dt + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] \\ &\quad + \int_a^b g^2(t)dt \end{aligned} \quad (22)$$

por el lema 1. Para concluir, es suficiente comparar (21) con (22). \square

3.2 Desarrollo en serie de la integral de Wiener

Vamos a ver que existe una relación muy particular entre la integral de Wiener y el movimiento Browniano. Tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5. Sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $L^2([a, b])$; entonces, para toda función $f \in L^2([a, b])$, la integral de Wiener de f se descompone en una serie de la forma siguiente:

$$\int_a^b f(t) dB_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n(t) dB_t, \quad (23)$$

con probabilidad 1 y en donde la suma aleatoria converge casi seguramente.

Demostración. Empecemos fijando una función $f \in L^2([a, b])$ y una base ortonormal $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2([a, b])$. Tenemos entonces

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n,$$

luego, integramos ambos lados de la expresión anterior con respecto a dB_t para obtener

$$\int_a^b f(t) dB_t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n dB_t = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t. \quad (24)$$

Verifiquemos que se tiene esta identidad en L^2 ; para ello vamos a calcular la expresión

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dB_t - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right]^2, \quad (25)$$

en donde $N \in \mathbb{N}$. Desarrollamos el cuadrado y se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t) dB_t \right)^2 - 2 \int_a^b f(t) dB_t \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t + \left(\sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right)^2 \right] \\ = \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t) dB_t \right)^2 \right] \\ - 2 \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dB_t \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right] \\ + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right)^2 \right] \\ = \int_a^b f^2(t) dt - 2 \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dB_t \int_a^b \phi_n dB_t \right] \\ + \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b \phi_n dB_t \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Utilizamos ahora el resultado (20) para obtener

$$= \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle^2,$$

lo que tiende a cero si $N \rightarrow +\infty$. Hemos, pues, verificado que se tiene la identidad (24) en L^2 puesto que la cantidad (25) tiende a cero. \square

Veamos ahora la relación anunciada entre la integral de Wiener y el movimiento Browniano. En efecto, en particular si escogemos $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ en la expresión (23), se tiene:

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}(s) dB_s = B_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \phi_n(s) ds \right) \left(\int_0^1 \phi_n(s) dB_s \right)$$

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n(\omega) \int_0^t \phi_n(s) ds,$$

en donde ζ_n son variables aleatorias i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$. Esto nos permite definir de una manera diferente el movimiento Browniano.

4 Una aplicación del movimiento Browniano y de la integral de Wiener

Como hemos visto en la introducción, en la modelización de los precios de las materias primas puede utilizarse el movimiento Browniano. Más concretamente, una serie cronológica -dada por la evolución de los precios en el tiempo- se descompone generalmente en dos partes: una *tendencia general* a la cual se añade *variaciones aleatorias*; de esta forma se obtiene el modelo matemático para trabajar en matemáticas financieras. Así, la evolución de los precios de un activo financiero estará dada por medio de la fórmula siguiente

$$dX_t = f dt + \sigma dB_t \quad (26)$$

Expliquemos un poco esta expresión. Aquí, dX_t representa la variación en el tiempo de los precios de un cierto activo financiero X_t , f es la tendencia general, mientras que σ es la intensidad de las variaciones aleatorias que están dadas por un movimiento Browniano estándar B_t .

En el mayor grado de generalidad, las funciones f y σ son funciones medibles que dependen del tiempo t y de los precios X_t . Es decir, $f = f(t, X_t)$ y $\sigma = \sigma(t, X_t)$; pero en una primera aproximación, podemos suponer que, tanto f como σ , dependen únicamente del tiempo: $f = f(t)$ y $\sigma = \sigma(t)$. Con esta simplificación, la ecuación diferencial (26) debe ser interpretada en el siguiente sentido:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB(s) \quad (27)$$

Diremos que (27) es la versión integral de la ecuación diferencial estocástica (26).

Gracias a la integral de Wiener y a la descripción del movimiento Browniano que acabamos de considerar en las secciones anteriores, la expresión (27) tiene un sentido muy concreto.

En cuanto a la resolución de este problema, tenemos el teorema a continuación:

TEOREMA 6. Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = [f(t)X_t + g(t)]dt + [\sigma(t)X_t + \theta(t)]dB(t), \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (28)$$

Entonces, su solución está dada por el proceso estocástico

$$X_t = xe^{Y_t} + \int_0^t e^{Y_t - Y_s} [g(s) - \theta(s)\sigma(s)] ds + \int_0^t e^{Y_t - Y_s} \theta(s) dB_s$$

en donde

$$Y_t = \int_0^t [f(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2] ds + \int_0^t \sigma(s) dB(s).$$

Nótese que este teorema permite estudiar ecuaciones más generales que las consideradas en la fórmula (26). La principal diferencia radica en la presencia del término X_t en la parte derecha de la ecuación (28). Podemos darnos cuenta que para realizar la demostración de este problema, es necesario considerar una integral más general que la integral de Wiener: en efecto, en la definición de esta integral dada en la fórmula (18), sólo habíamos considerado integrales de la forma

$$\int_a^b f(t) dB(t),$$

en donde f era una función determinista. Es, por lo tanto, necesario generalizar la noción de integral de Wiener. El objeto matemático que corresponde a esta generalización es la *integral de Itô* y se puede encontrar una descripción detallada de esta integral en [6] o [7]. Consideramos que la integral de Wiener es suficiente para un primer contacto con los objetos matemáticos que intervienen en la modelización financiera.

Tenemos, gracias al teorema 6, una descripción de la dinámica seguida por variables económicas, como son los precios del petróleo, cacao, flores o banano. Pero los mercados financieros van mucho más allá y utilizan estas variables como elementos de base para la construcción de nuevos productos.

Vamos a dar ahora un ejemplo que nos permitirá precisar el uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas en las actividades económicas. Supongamos que una empresa de transporte aéreo A desea planificar sus tarifas de boletos para el verano 2012. Evidentemente, el precio de los boletos dependerá del precio del petróleo, y es natural que la empresa A desee protegerse ante una subida repentina de los precios de los combustibles.

Existen mecanismos financieros para lograr este objetivo: la empresa A puede buscar un banco B y comprar un producto financiero con las siguientes características:

- *Duración del producto:* empieza el 1ero de enero 2012 y termina el 1ero de junio 2012.
- *Descripción del producto:* la empresa A tiene la **opción**, y no la *obligación*, de comprar el 1ero de junio al banco B una cantidad determinada N de barriles de petróleo a un precio fijo K llamado el *strike* del producto.

- *Precio del producto:* Este producto tiene un precio que notaremos P . Este precio de la cobertura depende de muchos factores: tiempo t , strike K , valor del precio del producto subyacente X_t , etc. Notaremos, entonces, $P = P(X_t, t)$.

De esta manera, la empresa A se protege de una subida repentina de los precios del combustible pues ha negociado por adelantado comprar su combustible a un cierto precio K . Este tipo de producto financiero es muy común y es denominado un *Call*.

¿Qué sucede el 1ero de junio? Para verlo, notamos X_t la evolución del precio del petróleo y sea X_T el precio del barril en el tiempo final $T=1$ ero de junio.

- Si $X_T > K$: El precio del barril de crudo, el 1ero de junio, es mayor que el precio negociado K . La empresa A tiene entonces todo interés en ejercer su opción: comprar N barriles al precio K , que es inferior al precio observado en el mercado, y de esta forma se ha protegido de una fuerte alza de los precios de esta materia prima.
- Si $X_T < K$: El precio del barril de petróleo, el 1ero de junio, es menor que el precio negociado K . En este caso la empresa A no tiene interés en comprar al banco B algo que está más barato si lo puede conseguir directamente en el mercado. Al no ejercer su opción, la empresa pierde la cantidad P que ha pagado para cubrirse de la alza de precios.

Es interesante notar que, en ambos casos, la empresa A se ha protegido de las fluctuaciones del precio del petróleo.

Observemos que la situación el 1er de junio es la siguiente:

$$P(X_T, T) = \max\{X_T - K; 0\}$$

y ésta es la condición al límite cuando $t = T$.

Indiquemos que, mientras más elevado sea el precio final X_T , mayor será el ahorro realizado por la empresa A , mientras que mayor será el riesgo del banco B quien tendrá que comprar a un precio elevado los barriles de petróleo para venderlos a un precio más bajo a la empresa A .

En los dos gráficos de la figura 5 se muestra la situación de la empresa A a la izquierda (*Short Call*), y del banco B a la derecha (*Long Call*). El *Premium* corresponde al precio de la cobertura; se observa claramente que si el precio del barril comienza a aumentar, el ahorro y el riesgo generados por este producto pueden ser substanciales. Es por esta razón que es muy importante conocer, en todo tiempo $0 < t < T$, el precio de la cobertura P .

En efecto, contrariamente a los seguros para autos, estos seguros de tipo *Call* pueden venderse y comprarse en los mercados financieros internacionales en los que intervienen una gran cantidad de actores distintos. Como los bancos no poseen reservas de barriles de petróleos, para cumplir el contrato el banco B está obligado a comprar en

el mercado los N barriles de petróleo. Esta transacción puede realizarse en cualquier momento antes del final del contrato, y esto permite la compra-venta de estos productos financieros a otras entidades. Esta compra-venta de barriles por parte del banco debe efectuarse de tal manera que *anule* el riesgo producido por el *Call*. De esta manera, se crea un mercado *secundario* de productos financieros adosados a materias primas (por oposición al mercado *primario* en donde se negocia el precio de estas materias primas) y, como hemos visto con este ejemplo, este mercado secundario corresponde a una necesidad muy real de las empresas.

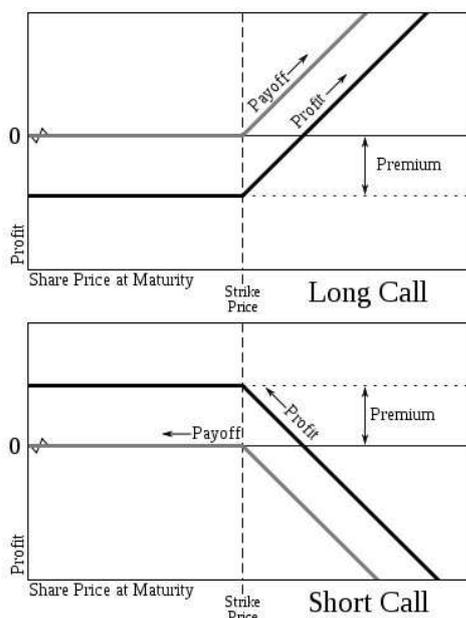


Figura 5. Evolución del ahorro y del riesgo en función de la evolución del precio del subyacente. Fuente: internet.

Para comprender lo que sucede con la dinámica del precio de la cobertura durante el tiempo $0 < t < T$, y poder anular el riesgo generado es necesario considerar la siguiente ecuación diferencial estocástica llamada la ecuación de *Black-Scholes*. En este modelo se asume que el producto subyacente X_t -el precio del petróleo en nuestro ejemplo- sigue una dinámica de la forma

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

mientras que el precio de la cobertura debe verificar la ecuación de *Black-Scholes*

$$\frac{\partial P(X_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P(X_t, t)}{\partial X_t^2} + r X_t \frac{\partial P(X_t, t)}{\partial X_t} - r P(X_t, t) = 0 \quad (29)$$

en donde r es la tasa de interés del mercado. Esta ecuación es consecuencia de un gran número de hipótesis simplificadoras y su obtención puede encontrarse en detalle en [8] o más rápidamente en [3].

La solución de esta ecuación diferencial estocástica está dada por la fórmula de *Black-Scholes*

$$P(X_t, t) = X_t \mathcal{N}(0, d_1) - Ke^{-rt} \mathcal{N}(0, d_2) \quad (30)$$

en donde $\mathcal{N}(0, d_1)$ y $\mathcal{N}(0, d_2)$ son dos leyes normales de varianza $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{X_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \right]$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$.

Es importante recalcar que es por medio de la ecuación de *Black-Scholes* (29) y del estudio de su solución (30) que se obtiene un mecanismo de cobertura eficaz que permite al banco B vender este producto financiero anulando su riesgo intrínseco.

El cálculo exacto de la solución (30), así como las estrategias utilizadas para la anulación del riesgo están fuera del alcance de este pequeño artículo. Hemos preferido concentrarnos en una exposición de las propiedades de los objetos de base que permiten construir las ecuaciones de *Black-Scholes*.

Estas fórmulas muestran la importancia económica de conocer correctamente las herramientas matemáticas que intervienen en la modelización de los mercados financieros.

5 Un poco de SCILAB

Damos aquí los códigos en *SCILAB* que sirvieron para realizar los gráficos de las figuras 2 y 4. Las ventajas de usar *SCILAB* radican en que es un programa libre y gratuito que está especialmente concebido para cálculos matriciales.

Hemos visto en la sección 2 que es posible *modelizar* el movimiento Browniano en una dimensión por medio de una caminata aleatoria. Vamos a seguir esta idea para el código informático:

```
function []= browniano1d(N)
X=zeros(N+1, 1);
X(1)=0;
for k=2:(N+1)
X(k)=X(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;
clf();
plot(X)

endfunction
```

Para el movimiento Browniano en tres dimensiones, se utilizó el siguiente código.

```
function []=browniano3d(N)
// inicializacion de los vectores
X=zeros(N+1,1); X(1)=0;
Y=zeros(N+1,1); Y(1)=0;
Z=zeros(N+1,1); Z(1)=0;
```

```
//construccion de los vectores
for k=2:(N+1)
X(k)=X(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;
for k=2:(N+1)
Y(k)=Y(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;
for k=2:(N+1)
Z(k)=Z(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;

clf();
plot3d(X,Y,Z)

endfunction
```

En ambos casos N representa la longitud de la caminata aleatoria. Visualmente, se obtienen buenas aproximaciones a partir de $N > 1000$. Evidentemente esto no es más que una aproximación del movimiento Browniano, pero es suficiente para tener una primera idea de sus trayectorias.

6 Conclusiones

Este pequeño artículo muestra algunas de las herramientas matemáticas clásicas utilizadas en matemáticas financieras. No debe tomarse en absoluto este texto como un compendio de estas herramientas sino más bien como una invitación a investigar las matemáticas que intervienen en estos conceptos financieros. Para el lector que desea saber un poco más, he recopilado un poco de bibliografía clásica sobre estos temas. En el libro [8] se encontrará una completa descripción, muy pedagógica, de los conceptos financieros y económicos mientras que en el libro [10] se hará mayor énfasis en la modelización matemática de estos conceptos. El texto [7] es una estupenda introducción a la integración estocástica y el libro [9] explica de forma muy clara cómo estudiar las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. El lector que desea tener más detalles matemáticos sobre los procesos estocásticos está invitado a consultar [6]. El libro [11] muestra en cambio aplicaciones

financieras de objetos matemáticos sofisticados. Finalmente, el libro [5] puede servir de base para los rudimentos de teoría de la medida e integración.

Recomiendo además leer la entrevista de Lorenzo Bergomi [4] en donde se explica la actividad matemática realizada en los bancos de inversiones.

Referencias

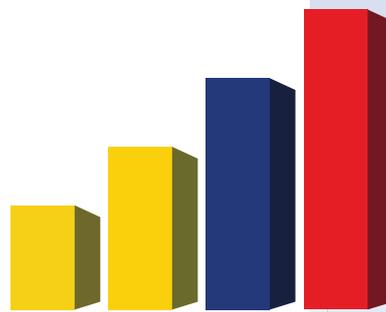
- [1] P. Baldi, L. Mazliak & P. Priouret. *Martingales et chaînes de Markov*. Hermann (2000).
- [2] N. Bouleau. *Processus Stochastiques et applications*. Hermann (2000).
- [3] E. Cepeda. *Portafolio de consumo, Problema de Merton*. Sometido a la revista *Analitika* (2011).
- [4] D. Chamorro. *Entrevista a Lorenzo Bergomi*. Asociación Amarun- www.amarun.org (2010).
- [5] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*. Vol. I. Cuadernos de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, No 4 (2010).
- [6] I. Karatzas & S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, segunda edición, GTM 113. Springer Verlag (1998).
- [7] H.H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext. Springer Verlag (2006).
- [8] J. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*, sexta edición traducida al francés. Pearson (2007).
- [9] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations*, sexta edición, Universitext. Springer Verlag (2003).
- [10] D. Lamberton & B. Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance*. Editions Ellipses (1997).
- [11] P. Malliavin & A. Thalmaier. *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*. Springer (2006).

Analítica

Modelación de series económicas mediante métodos
automáticos de regresión difusa

Modeling of economic time series using automated
fuzzy regression methods

Rodrigo Cajamarca y Hermann Mena



www.inec.gob.ec | www.ecuadorencifras.com

Modelación de series económicas mediante métodos automáticos de regresión difusa

Modeling of economic time series using automated fuzzy regression methods

Rodrigo Cajamarca[†] y Hermann Mena[‡]

[†]Ministerio de Educación, Quito, Ecuador

[‡]Departamento de Matemática, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador

[†]rpaulcajamarca@hotmail.com, [‡]hermann.mena@epn.edu.ec

Recibido: 20 de octubre de 2011

Aceptado: 8 de diciembre de 2011

Resumen

Este trabajo se desarrolla en un contexto donde Estadística e Inteligencia Computacional convergen: la Regresión Difusa. La idea fundamental de esta técnica es generalizar conceptos de regresión tradicional a conjuntos difusos. Concretamente, se investigará el potencial de aplicar los métodos automáticos de regresión difusa a cierto tipo de series económicas. En particular, se estudian los siguientes métodos: mínimos cuadrados por lotes, mínimos cuadrados recursivo, aprendizaje desde el ejemplo modificado y agrupamiento difuso combinado. Adicionalmente, se propone el método de mínimos cuadrados recursivo combinado, el cual es una de las principales contribuciones de este trabajo. Cada uno de estos métodos ha sido descrito e implementado en R para el caso unidimensional y se generaliza para el caso de entradas y salidas múltiples. Finalmente, se muestran resultados numéricos de la Reserva Internacional de Libre Disponibilidad y un índice de liquidez financiera, en las cuales se visualiza el comportamiento y desempeño de los métodos comparándolos con modelos SARIMA.

Palabras clave: Conjuntos difusos, funciones de pertenencia, lógica difusa, métodos automáticos de regresión difusa.

Abstract

This document works in a context where Statistics and Computational Intelligence converge: Fuzzy Regression. The idea of this technique is to generalize concepts from statistic regression into fuzzy sets; more precisely, to research the possibility of applying automated fuzzy regression methods for modeling economic data. It discusses the Batch Least Squares, Recursive Least Squares, Learning by Example and Combined Clustering methods. The main theoretical contribution of this research is the proposal of a novel method: the Combined Recursive Least Squares. All the methods are described and implemented in R for the one-dimensional case and generalized for the multiple input/output case. To conclude, numerical tests from the Free Liquidity International Reserve (RILD) and a financial index show the good performance of these methods compared to SARIMA models.

Keywords: Fuzzy sets, Membership Functions, Fuzzy Logic, Automated Fuzzy Regression.

Código JEL: C02, C22, C32.

1 Introducción

Actualmente, existen muchos métodos y técnicas diseñadas para modelar fenómenos económicos. Lamentablemente, muchos de estos métodos no han dado buenos resultados debido, sobre todo, a la presencia de incertidumbre en los datos; este es el caso de varias técnicas tradicionales, *e.g.*, regresión clásica. En general, la falta de conocimiento del sistema, confianza en la información, o la presencia de datos incompletos/imputados constituyen los obstáculos más grandes que los métodos de modelización deben enfrentar. Afortunadamente, en situaciones como esta la modelación difusa constituye una opción real y competitiva. [9, 15].

La idea fundamental de la regresión difusa es generalizar conceptos de la regresión tradicional a datos que se pueden modelar con conjuntos difusos. Estos conjuntos, en general, describen de mejor manera los fenómenos inmersos en el sistema. La regresión probabilística solamente puede modelar el fenómeno de la incertidumbre mediante la inclusión de intervalos de confianza. La aleatoriedad puede considerarse como uno de los componentes de la vaguedad, junto a la imprecisión. Otras formas de incertidumbre se pueden encontrar en la ambigüedad, la incongruencia, problemas de especificación y factores no considerados por la alta complejidad del sistema. En algunos casos, es posible incorporar estas restricciones a ciertos modelos de regresión probabilística. Sin embargo, la inclusión de estas restricciones implica que algunos supuestos requeridos por la teoría ya no se satisfagan, *e.g.*, que el valor esperado de los residuos sea cero [6]. Esto no ocurre en la regresión difusa, método en el que la presencia de un número mayor de restricciones no constituye un impedimento para su aplicación, puesto que las desviaciones entre los valores de pertenencia observados y los valores de pertenencia estimados se asumen dependientes de la incertidumbre.

Este trabajo está orientado a revisar y extender algunas propuestas que se han formulado en la literatura sobre la regresión difusa, con el objetivo de proporcionar un instrumento metodológico a problemas reales en los cuales los datos disponibles se ven afectados por factores como la imprecisión e incertidumbre. En particular, nos enfocamos en los métodos automáticos de regresión difusa. En la Sección 2 se revisan algunas definiciones y los métodos de mínimos cuadrados por lotes, mínimos cuadrados recursivo, aprendizaje desde el ejemplo modificado, agrupamiento difuso combinado; además, se propone el método de mínimos cuadrados recursivo combinado. Cada uno de estos métodos ha sido descrito e implementado para el caso unidimensional, y generalizado para el caso de entradas y salidas múltiples. En la Sección 3, se muestran resultados numéricos de la Reserva Internacional de Libre Disponibilidad (RILD) y un índice de liquidez financiera, en los cuales se visualiza el comportamiento y desempeño de los métodos. Finalmente, en la Sección 4 se presentan algunas

consideraciones sobre lo analizado y planteamientos para trabajos futuros.

2 Metodología

2.1 Principales definiciones

La teoría de conjuntos difusos fue propuesta originalmente por Lotfi Zadeh [18] para describir matemáticamente la imprecisión y la vaguedad que se presentan en el lenguaje diario. Formalmente, un conjunto difuso \tilde{A} en el conjunto universo X , está caracterizado por una *función de pertenencia* $\mu_{\tilde{A}}$ que toma valores en el intervalo $[0, 1]$, [18]. En este sentido, un conjunto difuso es una generalización de un conjunto clásico pues la función de pertenencia permite que tome valores en el intervalo $[0, 1]$ en lugar de solo $\{0, 1\}$ (no pertenece o pertenece, respectivamente). Concretamente, el conjunto \tilde{A} se representa como el conjunto de pares,

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

donde $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ es la función de pertenencia para \tilde{A} ; para más detalles ver [5].

Sea $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$; $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$ y $\tilde{Y} \subset \mathbb{R}$, la función que describe el sistema en estudio; se quiere construir un sistema difuso representado por la función $f : X \rightarrow Y$; $X \subset \tilde{X}$ y $Y \subset \tilde{Y}$, mediante la elección de un vector de parámetros θ . Se espera aproximar la función g de la forma:

$$g(x) = f(x \mid \theta) + e(x), \quad (1)$$

para todo $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in X$; donde $e(x)$ representa el error aproximación. La i -ésima entrada-salida de la función g se nota como (x^i, y^i) donde $x^i \in X$, $y^i \in Y$ con $y^i = g(x^i)$, para $i = 1, \dots, M$. Luego $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]^T$ corresponde el vector de entradas para el i -ésimo par de datos. El conjunto de parejas ordenadas de entrada-salida del sistema se conoce como *conjunto de datos de entrenamiento* y se nota

$$G = \{(x^1, y^1), \dots, (x^M, y^M)\} \subset X \times Y \quad (2)$$

donde M es la cardinalidad de G .

Los métodos automáticos presentados en este trabajo generan reglas base, *i.e.*, reglas que describen la relación que existe entre las variables de entrada y salida, o en su defecto, usan una regla base predeterminada para modelar el sistema. En cualquier caso, las reglas están compuestas por antecedentes y consecuentes, *i.e.*,

SI *antecedente* ENTONCES *consecuente*,

las reglas permiten predecir y/o gobernar la salida del sistema con conocimiento a priori de sus entradas [12].

En los métodos que se revisan a continuación, tanto las variables de entrada como las de salida se deben describir con funciones de pertenencia específicas. En la mayoría de métodos se incorporan las funciones de pertenencia Gaussianas para las variables de entrada, pues describen una amplia gama de fenómenos y la función de pertenencia Delta para las variables de salida. Cabe señalar que los métodos pueden ser modificados para cualquier tipo de función de pertenencia de entrada o salida.

2.2 Mínimos cuadrados por lotes (MCL)

Este método aplica el estimador de mínimos cuadrados ordinarios a conjuntos difusos. Para ello, es necesario caracterizar el comportamiento del sistema mediante una regla-base (centros y dispersiones de las funciones de pertenencia para las variables de entrada y salida). En los casos en los cuales se desconoce el comportamiento del sistema, es posible utilizar otros algoritmos con la capacidad de formar reglas, como los métodos de aprendizaje desde el ejemplo; ver [15].

Para aplicar los mínimos cuadrados, se utiliza el sistema

$$f(x^i | \theta) = \frac{\sum_{l=1}^R b_l \mu_{il}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}} \quad i = 1, \dots, M \quad (3)$$

donde,

$$\mu_{il} = \prod_{j=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^i - c_j^l}{\sigma_j^l} \right)^2 \right] \quad l = 1, \dots, R \quad (4)$$

R representa el número de reglas en la regla-base y n es la dimensión del vector x . Es importante señalar que el parámetro R se desconoce para algunos métodos. En ciertos casos, este parámetro es determinado por el algoritmo directamente *e.g.*, aprendizaje desde el ejemplo modificado. Los b_l son los centros de las funciones de pertenencia de salida y los c_j^l, σ_j^l son los centros y dispersiones de las funciones de pertenencia de entrada, respectivamente. Hay que señalar que la dispersión relativa $\sigma_j^l > 0$ para todo l y j . Los centros y dispersiones de las funciones de pertenencia de entrada se pueden inicializar utilizando un proceso heurístico, tal que,

$$\sigma_j^l = \sigma > 0 \quad l = 1, \dots, R, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

Luego por (3)

$$f(x^i | \theta) = \frac{b_1 \mu_{i1}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}} + \frac{b_2 \mu_{i2}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}} + \dots + \frac{b_R \mu_{iR}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}} \quad i = 1, \dots, M$$

si se nota:

$$\tilde{\zeta}_{il} = \frac{\mu_{il}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}} \quad l = 1, \dots, R,$$

entonces,

$$f(x^i | \theta) = b_1 \tilde{\zeta}_{i1} + b_2 \tilde{\zeta}_{i2} + \dots + b_R \tilde{\zeta}_{iR}$$

es decir,

$$y^i = f(x^i | \theta) = \theta^\top \tilde{\zeta}^i \quad (6)$$

donde:

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_R \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\zeta}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_{i1} \\ \tilde{\zeta}_{i2} \\ \vdots \\ \tilde{\zeta}_{iR} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, M.$$

Se puede apreciar que (6) es similar al modelo de regresión lineal [6]. La diferencia radica en que, en lugar de la matriz X , se consideran los números difusos de la matriz $\tilde{\zeta}$, de dimensión $R \times M$, es decir, son los lotes o particiones formadas por las funciones de pertenencia de las variables de entrada [13].

Finalmente, si se nota $\Phi = \tilde{\zeta}$ y se aplica el método de mínimos cuadrados el estimador está dado por

$$\hat{\theta} = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top y \quad (7)$$

El método de mínimos cuadrados por lotes ha probado ser muy eficiente para una gran variedad de aplicaciones. Sin embargo, la matriz $\Phi^\top \Phi$ podría ser mal condicionada. Una generalización de este método para el caso de entrada-salida múltiple se presenta en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Mínimos cuadrados por lotes entrada-salida múltiple

Entrada: $X_{M \times n}$ matriz de las variables de entrada
 $Y_{M \times H}$ matriz de las variables de salida
 $\sigma > 0$

- 1: $R \leftarrow M - 1$
- 2: $c_j^l \leftarrow x_j^l + \frac{1}{2}(x_j^{l+1} - x_j^l) \quad l = 1, \dots, R, j = 1, \dots, n$
- 3: $\sigma_j^l \leftarrow \sigma \quad l = 1, \dots, R, j = 1, \dots, n$
- 4: **para** $i \leftarrow 1, M$ **hacer**
- 5: **para** $l \leftarrow 1, R$ **hacer**
- 6: $\mu_{il} \leftarrow \prod_{j=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^i - c_j^l}{\sigma_j^l} \right)^2 \right]$
- 7: **fin para**
- 8: $\tilde{\zeta}_{il} \leftarrow \frac{\mu_{il}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}}$
- 9: **fin para**
- 10: $\Phi \leftarrow \tilde{\zeta}(x)$
- 11: **para** $h \leftarrow 1, H$ **hacer**
- 12: $\hat{\theta}_h \leftarrow (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top y_h$
- 13: **devolver** $f_h(x | \hat{\theta}_h) \leftarrow \hat{\theta}_h^\top \tilde{\zeta}(x)$
- 14: **fin para**

2.3 Mínimos cuadrados recursivo (MCR)

El método de mínimos cuadrados recursivo es, como su nombre lo indica, una versión recursiva del método de mínimos cuadrados por lotes. Este método utiliza en cada iteración una parte del conjunto de entrenamiento y no requiere el cálculo de la inversa de $\Phi^T \Phi$; de esta manera su desempeño es más eficiente que el MCL. El algoritmo calcula $\hat{\theta}(k)$ mediante $\hat{\theta}(k-1)$, x^k , y y^k ; donde k representa un ciclo sobre el conjunto de entrenamiento G , la iteración se repite K veces; para más detalles ver [11].

Al igual que para el MCL, se utiliza la función de pertenencia Gaussiana para las entradas y una función Delta para las salidas. Los parámetros b_l , c_j^l y $\sigma_j^l > 0$ se definen como en el método anterior.

Sea $P(k)$ la matriz $n \times n$ definida como

$$P(k) = (\Phi^T \Phi)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^k x^i (x^i)^T \right)^{-1}, \quad (8)$$

se obtiene

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)x^k (I + (x^k)^T P(k-1)x^k)^{-1} (x^k)^T P(k-1), \quad (9)$$

y

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)x^k (y^k - (x^k)^T \hat{\theta}(k-1)). \quad (10)$$

Si se aplica el lema de la matriz inversa, se evita la inversión de una matriz; y, en su lugar, únicamente se calcula el inverso del escalar $(I + (x^k)^T P(k-1)x^k)^{-1}$. Las ecuaciones (9) y (10) caracterizan $P(k)$ y $\hat{\theta}(k)$ y permiten describir el método de mínimos cuadrados recursivo.

Para inicializar el algoritmo, se emplean generalmente $\hat{\theta}(0) = 0$ y $P(0) = P_0 = \alpha I$ para algún $\alpha > 0$. Otra opción es utilizar una aproximación heurística.

Además se puede usar el método de mínimos cuadrados recursivo ponderado. En este caso se utiliza un factor $0 < \lambda \leq 1$ que se conoce como un "factor de pérdida de memoria" y sirve para dar mayor peso a la información más reciente. Si $\lambda = 1$ se obtiene el método MCR original. En el método de mínimos cuadrados recursivo $P(k)$ se define como:

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} (I - P(k-1)x^k (\lambda I + (x^k)^T P(k-1)x^k)^{-1} (x^k)^T) P(k-1) \quad (11)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)x^k (y^k - (x^k)^T \hat{\theta}(k-1))$$

Si en el sistema difuso (3), se reemplaza x^k con $\xi(x^k)$ en (11) se obtiene

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left\{ I - P(k-1)\xi(x^k) \left[\lambda I + (\xi(x^k))^T P(k-1)\xi(x^k) \right]^{-1} (\xi(x^k))^T \right\} P(k-1)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\xi(x^k) \left[y^k - (\xi(x^k))^T \hat{\theta}(k-1) \right]$$

Al igual que en la sección anterior, se generalizó este método para el caso de entrada-salida múltiple; ver Algoritmo 2.

2.4 Aprendizaje desde el ejemplo modificado (AEM)

Este método tiene un enfoque muy intuitivo para la construcción de un sistema difuso el cual se basa en técnicas de optimización para determinar los parámetros del sistema. En el AEM se generan automáticamente reglas y funciones de pertenencia; por esta razón, este método es una alternativa viable a problemas en los cuales se carece de información *a priori* del sistema. De manera análoga a la sección anterior, se consideran funciones de pertenencia Gaussiana y Delta; el método se describe de la siguiente manera:

1. Construcción de un sistema difuso inicial: dados el par de datos de entrada y salida $(x^i, y^i) \in G, i = 1, \dots, M$, se forma un sistema difuso inicial con (x^1, y^1) y se inicializa el número de reglas $R = 1$

$$f(x^i | \theta) = b_1 \quad (12)$$

para $c_j^1 = x_j^1, \sigma_j^1 = \sigma_0$ (parámetros de las funciones de pertenencia de las variables de entrada) y $b_1 = y^1$ (parámetro de la función de pertenencia de la variable de salida), para todo $j = 1, \dots, n$.

2. Evaluación de los datos de entrenamiento: se utiliza un factor de tolerancia ε_f que determina el error. Para cada $(x^i, y^i) \in G$ se evalúa:

- si $|f(x^i | \theta) - y^i| \leq \varepsilon_f$, entonces el sistema difuso f representa correctamente (x^i, y^i) , y por lo tanto, no es necesario añadir ninguna regla. Se repite este paso, con el siguiente par de datos de entrenamiento.
- si $|f(x^i | \theta) - y^i| > \varepsilon_f$, entonces se añade una regla para representar (x^i, y^i) modificando los parámetros de las funciones de pertenencia; continuar al Paso 3

3. Codificación de parámetros del sistema difuso: si no se cumple la condición del Paso 2, se añade una nueva regla $R = R + 1, b_R = y^i$ y $c_j^i = x_j^i$, para todo $j = 1, \dots, n$. La modificación de los σ_j^i para $i = R$ se realiza utilizando los centros de las funciones de pertenencia de la forma;

$$n_j^* = \arg \min \{ |c_j^{i'} - c_j^i| : i' = 1, 2, \dots, R, i' \neq i \},$$

Algoritmo 2 Mínimos cuadrados recursivo entrada-salida múltiple

Entrada: $X_{M \times n}$ matriz de las variables de entrada

$Y_{M \times H}$ matriz de las variables de salida

K número de iteraciones del algoritmo

$\sigma > 0, \alpha > 0, 0 < \lambda \leq 1$

- 1: $\hat{\theta}(0) \leftarrow 0$
 - 2: $P(0) \leftarrow \alpha I$
 - 3: $c_j^l \leftarrow x_j^l + \frac{1}{2}(x_j^{l+1} - x_j^l) \quad l = 1, \dots, R, j = 1, \dots, n$
 - 4: $\sigma_j^l \leftarrow \sigma \quad l = 1, \dots, R, j = 1, \dots, n$
 - 5: **para** $i \leftarrow 1, M$ **hacer**
 - 6: **para** $l \leftarrow 1, R$ **hacer**
 - 7: $\mu_{il} \leftarrow \prod_{j=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^i - c_j^l}{\sigma_j^l} \right)^2 \right]$
 - 8: **fin para**
 - 9: $\xi_{il} \leftarrow \frac{\mu_{il}}{\sum_{i=1}^R \mu_{il}}$
 - 10: **fin para**
 - 11: **para** $h \leftarrow 1, H$ **hacer**
 - 12: $s \leftarrow 0$ contador auxiliar
 - 13: **para** $k \leftarrow 1, K \times M$ **hacer**
 - 14: **si** $s \leq M$ **entonces**
 - 15: $s \leftarrow s + 1$
 - 16: **si no**
 - 17: $s \leftarrow 1$
 - 18: **fin si**
 - 19: $P_h(k) \leftarrow \frac{1}{\lambda} \left\{ I - P_h(k-1) \xi(x^s) \left[\lambda I + (\xi(x^s))^\top P_h(k-1) \xi(x^s) \right]^{-1} (\xi(x^s))^\top \right\} P_h(k-1)$
 - 20: $\hat{\theta}_h(k) \leftarrow \hat{\theta}_h(k-1) + P_h(k) \xi(x^s) \left[y_h^s - (\xi(x^s))^\top \hat{\theta}_h(k-1) \right]$
 - 21: **fin para**
 - 22: **devolver** $f_h(x | \hat{\theta}_h) \leftarrow \hat{\theta}_h^\top \xi(x)$
 - 23: **fin para**
-

donde $j = 1, 2, \dots, n$ y c_j^i es fijo. Finalmente se actualiza los σ_j^i para $i = R$, *i.e.*,

$$\sigma_j^i = \frac{1}{\omega} |c_j^i - c_j^{n^*}| \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

donde ω es un factor que determina la sobreposición de las funciones de pertenencia. Se puede observar en (13) que el factor de ponderación ω y la dispersión σ_j^i tienen una relación inversa, *i.e.*, para un ω más grande hay una menor sobreposición. Una vez que el Paso 3 se ha completado, se repite el Paso 2 hasta que el número de datos de entrenamiento $(x^i, y^i) \in G$ se haya terminado.

Dado que el parámetro ε_f caracteriza la exactitud con la que opera el sistema difuso, la elección de ε_f determina el número de reglas. Una de las partes más importantes en la construcción de sistemas difusos es la elección del número de reglas difusas R , para lo cual es necesario el criterio de expertos [8]. Algunas aplicaciones particulares limitan el número de reglas del sistema, ya sea por las características específicas del fenómeno o por su costo computacional.

En general, existe una compensación entre la complejidad computacional y la capacidad funcional basada en el número de reglas difusas R . La generalización para el caso de entrada-salida múltiple de este método se presenta en el Algoritmo 3.

2.5 Agrupamiento difuso combinado (ADC)

Este método se compone de dos etapas. En la primera, se identifican las reglas del sistema mediante el algoritmo c-medias difuso, el cual particiona los datos de entrada en conjuntos difusos datos similares [4]. En la segunda etapa, se aplica mínimos cuadrados para caracterizar el conjunto de salida.

El agrupamiento difuso c-medias permite que los elementos de los grupos tengan diferentes grados de pertenencia. Estos grados de pertenencia μ_{il} y los centros de clase \underline{v}^l se determinan de manera iterativa minimizando la siguiente función objetivo,

$$J = \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^R (\mu_{il})^m |x^i - \underline{v}^l|^2, \quad (14)$$

Algoritmo 3 Aprendizaje desde el ejemplo modificado entrada-salida múltiple

Entrada: $X_{M \times n}$ matriz de las variables de entrada
 $Y_{M \times H}$ matriz de las variables de salida
 $\epsilon_f > 0, \omega > 0$

```

1:  $R \leftarrow 1$ 
2:  $b_1 \leftarrow y^1$ 
3:  $\hat{\theta} \leftarrow b$ 
4:  $c_j^1 \leftarrow x_j^1 \quad j = 1, \dots, n$ 
5: para  $h \leftarrow 1, H$  hacer
6:   para  $i \leftarrow 1, M$  hacer
7:     para  $l \leftarrow 1, R$  hacer
8:        $\mu_{il} \leftarrow \prod_{j=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_j^i - c_j^l}{\sigma_j^l} \right)^2 \right]$ 
9:     fin para
10:     $\zeta_{il} \leftarrow \frac{\mu_{il}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}}$ 
11:     $f^l(x) \leftarrow \hat{\theta}^\top \zeta(x)$ 
12:    si  $|f_h^l(x) - y_h^l| > \epsilon_f$  entonces
13:       $R \leftarrow R + 1$ 
14:       $b_R \leftarrow y_h^l$ 
15:       $\hat{\theta}_h \leftarrow b$ 
16:       $c_j^R \leftarrow x_j^l \quad j = 1, \dots, n$ 
17:       $n_j^* \leftarrow \arg \min \{ |c_j^{l'} - c_j^l| : l' = 1, 2, \dots, R, l' \neq l \}$ 
18:       $\sigma_j^l \leftarrow \frac{1}{\omega} |c_j^l - c_j^{n_j^*}|$ 
19:    fin si
20:  fin para
21:  devolver  $f_h(x | \hat{\theta}_h) \leftarrow \hat{\theta}_h^\top \zeta_h(x)$ 
22: fin para

```

donde $m > 1$ es un parámetro que sirve para determinar la sobreposición entre las clases, M es el número de pares de entrada-salida (x^i, y^i) en el conjunto de entrenamiento G , R es el número de reglas que se quiere calcular (clases o grupos), $\underline{v}^l = [v_1^l, v_2^l, \dots, v_n^l]^\top$ para $l = 1, \dots, R$ es el vector de centros de clases y μ_{il} para $i = 1, \dots, M$ y $l = 1, \dots, R$ es el grado de pertenencia de x^i en el l -ésimo grupo, $|x| = \sqrt{x^\top x}$, [17].

El sistema difuso considera que la salida es una función lineal de las entradas, *i.e.*,

$$\text{Si } H^l \text{ entonces } g_l(x) = a_{l,0} + a_{l,1}x_1 + \dots + a_{l,n}x_n, \quad (15)$$

donde n es el número de entradas y H^l es un conjunto difuso de entrada dado por

$$H^l = \{(x, \mu_{H^l}(x)) : x \in \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n\},$$

\mathcal{X}_i es el i -ésimo universo y $\mu_{H^l}(x)$ es la función de pertenencia asociada a H^l , la cual representa la premisa para la regla l y $g_l(x) = \underline{a}_l^\top \hat{x}$; $\underline{a}_l^\top = [a_{l,0}, a_{l,1}x_1, \dots, a_{l,n}x_n]$ y $\hat{x} = [1, x^\top]^\top$ para $l = 1, \dots, R$. El sistema difuso resultante es el promedio ponderado de las salidas $g_l(x)$ y esta defi-

nido por

$$f(x | \theta) = \frac{\sum_{l=1}^R g_l(x) \mu_{H^l}(x)}{\sum_{l=1}^R \mu_{H^l}(x)}, \quad (16)$$

donde R es el número de reglas en la regla-base. El algoritmo funciona de la siguiente manera:

1) inicialización de parámetros: se especifica el "factor de solapamiento" m . Si $m > 1$ los puntos con menor grado de pertenencia tienen menor influencia en el cálculo de un nuevo centro. Luego, se especifica el número de grupos (clases) R que se desea calcular; el cual es igual al número de reglas en la regla base y debe ser menor o igual al número de datos en el conjunto de entrenamiento G , *i.e.*, $R \leq M$. Entonces, se especifica la tolerancia $\epsilon_c > 0$ que determina el error permitido en el cálculo para los centros de los grupos. Finalmente, se procede a inicializar los centros de los grupos \underline{v}_0^l .

2) cálculo de los nuevos centros: se utilizan los centros iniciales \underline{v}_0^l de manera que la función objetivo (14) sea minimizada. Las condiciones para la minimización J están dadas por:

$$\underline{v}_{new}^l = \frac{\sum_{i=1}^M x^i (\mu_{il}^{new})^m}{\sum_{i=1}^M (\mu_{il}^{new})^m}, \quad (17)$$

donde,

$$\mu_{il}^{new} = \left[\sum_{k=1}^R \left(\frac{|x^i - \underline{v}_{old}^l|^2}{|x^i - \underline{v}_{old}^k|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]^{-1}, \quad (18)$$

para $i = 1, 2, \dots, M$ y $l = 1, 2, \dots, R$ y $\sum_{l=1}^R \mu_{il}^{new} = 1$

3) evaluación: se compara la distancia entre los centros nuevos de los grupos \underline{v}_{new}^l y los centros previos \underline{v}_{old}^l mediante,

$$|\underline{v}_{new}^l - \underline{v}_{old}^l| < \epsilon_c \quad l = 1, 2, \dots, R \quad (19)$$

si se cumple (19) significa que los centros \underline{v}_{new}^l representan correctamente a los datos, el algoritmo de agrupamiento termina y se procede con la decodificación de la salida (Paso 4). Caso contrario, se continua iterando mediante (17) y (18) hasta que los nuevos centros satisfagan (19).

4) decodificación de la salida: se calcula la función $g_l(x) = \underline{a}_l^\top(\hat{x})$, $l = 1, 2, \dots, R$ para cada regla, es decir para cada centro de grupo \underline{v}_l , se minimiza la función J_l

$$J_l = \sum_{i=1}^M (\mu_{il})^2 (y^i - (\hat{x}^i)^\top \underline{a}_l)^2 \quad (20)$$

donde, $l = 1, 2, \dots, R$, y^i es la parte de la salida del i -ésimo par de datos $d^{(i)} = (x^i, y^i)$ y el producto entre $(\hat{x}^i)^\top$ y \underline{a}_l define la salida asociada con la l -ésima regla para el i -ésimo punto de datos de entrenamiento, [4]. Al observar (20), se puede notar que la minimización de J_l respecto a \underline{a}_l corresponde a un problema de mínimos cuadrados ponderados, cuya solución es:

$$\underline{a}_l = (\hat{X}^\top D_l^2 \hat{X})^{-1} \hat{X}^\top D_l^2 Y,$$

donde,

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x^1 & \dots & x^M \end{bmatrix},$$

$$Y = [y^1, \dots, y^m]^\top,$$

$$D_l^2 = (\text{diag}[\mu_{1l}, \dots, \mu_{Ml}])^2.$$

Una descripción detallada de este método generalizado al caso entrada-salida múltiple, se encuentra en el Algoritmo 4.

Algoritmo 4 Agrupamiento difuso combinado entrada-salida múltiple

Entrada: $X_{M \times n}$ matriz de las variables de entrada

$Y_{M \times H}$ matriz de las variables de salida

R número de reglas (clases o grupos)

$\epsilon_c > 0, m > 1$

1: $X_{\min} \leftarrow \min\{x_j, j = 1, \dots, n\}$

2: $X_{\max} \leftarrow \max\{x_j, j = 1, \dots, n\}$

3: $\underline{v}_{0j}^l \leftarrow X_{\min,j} + l \left(\frac{X_{\max,j} - X_{\min,j}}{R+1} \right) \quad j = 1, \dots, n,$
 $l = 1, \dots, R$

4: $\underline{v}_{new}^l \leftarrow \underline{v}_0^l \quad l = 1, \dots, R$

5: **mientras** $|\underline{v}_{new}^l - \underline{v}_{old}^l| > \epsilon_c \quad i \leftarrow 1, \dots, M, l \leftarrow 1, \dots, R$
hacer

6: $\underline{\mu}_{il}^{new} \leftarrow \left[\sum_{k=1}^R \left(\frac{|x^i - \underline{v}_{old}^k|^2}{|x^i - \underline{v}_{old}^k|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]^{-1}$

7: $\underline{v}_{new}^l \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^M x^i (\underline{\mu}_{il}^{new})^m}{\sum_{i=1}^M (\underline{\mu}_{il}^{new})^m}$

8: **fin mientras**

9: **para** $i \leftarrow 1, M$ **hacer**

10: $\hat{x}^i \leftarrow [1, x^i]$

11: **fin para**

12: $\hat{X} \leftarrow \hat{x}^\top$

13: $Y \leftarrow [y^1, \dots, y^m]^\top$

14: $D_l^2 \leftarrow (\text{diag}[\mu_{1l}, \dots, \mu_{Ml}])^2$

15: **para** $h \leftarrow 1, H$ **hacer**

16: **para** $l \leftarrow 1, R$ **hacer**

17: $\underline{a}_{lh} \leftarrow (\hat{X}^\top D_l^2 \hat{X})^{-1} \hat{X}^\top D_l^2 Y_h$

18: **devolver** $g_{lh}(x) \leftarrow \underline{a}_{lh}^\top \hat{x}$

19: **fin para**

20: **fin para**

2.6 Mínimos cuadrados recursivo combinado (MCRC)

Hasta ahora se han descrito y generalizado los métodos automáticos de regresión difusa que se encuentran en la literatura, [13, 15]. En esta sección, se propone el método de mínimos cuadrados recursivo combinado, el cual constituye el principal aporte teórico de este trabajo. Este método se compone de dos etapas; en primer lugar, se utiliza el algoritmo c-medias difuso para la identificación de las reglas del sistema; luego, se aplica el método de mínimos cuadrados recursivo para caracterizar el conjunto de salida [2]. Los resultados numéricos demuestran el buen desempeño de este método, como se verá en la Sección 3.

El método de mínimos cuadrados recursivo, requiere que la regla-base del sistema esté completamente especificada, *i.e.*, número de reglas, centros de funciones de pertenencia, etc. Puesto que las reglas del sistema en los métodos automáticos se encargan de predecir y/o gobernar las salidas de los sistemas difusos, es necesario un algoritmo que permita una adecuada especificación de reglas. El algoritmo c-medias difuso especifica eficientemente las reglas del sistema; y luego, se procede a la aplicación del método de mínimos cuadrados recursivo. Este método posee características muy útiles para ser implementado:

- no requiere la inversión de una matriz, como en el caso de los mínimos cuadrados por lotes y agrupamiento difuso combinado. En su lugar, se calcula únicamente el inverso de un escalar,
- los mínimos cuadrados recursivos son más eficientes para incluir las reglas del sistema [13],
- la convergencia del método es competitiva respecto a otras técnicas [7].

Estas razones justifican la implementación del método de mínimos cuadrados recursivo.

El método MCRC se describe a continuación:

1. **Determinar el número de centros:** se inicializa R ,

$$R = c,$$

$$\underline{v}_{new}^l = \underline{v}_0^l \quad l = 1, \dots, R$$

para lo cual se aplica algún método heurístico.

2. **Calcular una partición de los datos:** se asigna cada punto al grupo más cercano utilizando la función de pertenencia

$$\underline{\mu}_{il}^{new} = \left[\sum_{k=1}^R \left(\frac{|x^i - \underline{v}_{old}^k|^2}{|x^i - \underline{v}_{old}^k|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]^{-1},$$

3. **Calcular los nuevos centros:** mediante

$$\underline{v}_{new}^l = \frac{\sum_{i=1}^M x^i (\underline{\mu}_{il}^{new})^m}{\sum_{i=1}^M (\underline{\mu}_{il}^{new})^m},$$

4. **Evaluar:** si $|\underline{v}_{new}^l - \underline{v}_{old}^l| \leq \epsilon_c$ para $i = 1, \dots, M, l = 1, \dots, R$ la partición es estable, el proceso se detiene. Caso contrario, se regresa al Paso 2.
5. **Inicializar los parámetros del MCR:** $\hat{\theta}(0) = 0, P(0) = \alpha I$
6. **Calcular los grados de pertenencia:** utilizando los centros, $i = 1, \dots, M$ y $l = 1, \dots, R$

$$\mu_{il} = \prod_{j=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^i - \underline{v}_j^l}{\sigma_j^l} \right)^2 \right]$$

$$\xi_{il} = \frac{\mu_{il}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}}$$

7. Aplicar el MCR

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left\{ I - P(k-1) \xi(x^k) \left[\lambda I + (\xi(x^k))^T P(k-1) \xi(x^k) \right]^{-1} (\xi(x^k))^T \right\} P(k-1)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k) \xi(x^k) \left[y^k - (\xi(x^k))^T \hat{\theta}(k-1) \right]$$

Al aplicar el algoritmo c-medias difuso, se debe inicializar el número de reglas R (grupos o clases) y los valores de los centros de las clases cuidadosamente, ya que los resultados son sensibles a la elección de estos valores iniciales. La generalización al caso de entrada-salida múltiple de este método se encuentra en el Algoritmo 5.

3 Aplicación

En esta sección, se presentan resultados de las pruebas numéricas realizadas con información de la Reserva Internacional de libre Disponibilidad (RILD) de Ecuador¹ y un índice de liquidez financiera². El objetivo de validar los métodos y analizar su comportamiento.

Los resultados para cada una de las aplicaciones numéricas fueron obtenidos mediante una aplicación desarrollada en R [3]. Para ello se implementará los métodos:

- mínimos cuadrados por lotes (MCL),
- mínimos cuadrados recursivo (MCR),
- aprendizaje desde el ejemplo modificado (AEM),
- agrupamiento difuso combinado (ADC),
- mínimos cuadrados recursivo combinado (MCRC).

Estos métodos fueron implementados utilizando funciones de pertenencia Gaussianas y Triangulares. Únicamente en el caso del agrupamiento difuso combinado no se implementó estas funciones, debido a que este método define específicamente su función de pertenencia.

Para visualizar de mejor manera el desempeño de cada método, se estandarizaron los datos, *i.e.*, se utilizó una escala porcentual o, en su defecto, se normalizaron y estandarizaron las variables, [10]. Se dividió al conjunto de datos en un conjunto de entrenamiento y un conjunto de pruebas (*back testing*); además, para contrastar los resultados se calcularon modelos de series de tiempo (SARIMA) para las aplicaciones de estudio, utilizando el paquete estadístico *forecast* y la función *auto.arima* del software R [14].

3.1 Reserva Internacional de Libre Disponibilidad (RILD) de Ecuador

La administración de las reservas internacionales requiere de objetivos claros, sistemas de control fuertes y una apreciación realista de las limitaciones que se tienen. Un manejo eficiente de estas reservas implica una administración macroeconómica exitosa para un país. La mayor parte de los bancos centrales tienden a mantener reservas en forma de bonos, los cuales devengan intereses de bajo riesgo, o de otros activos de riesgo similar en algún tipo de divisa. Lo anterior constituye un intento de asegurar los valores de mercado de sus activos externos, los cuales son susceptibles a sufrir variaciones, de manera que sean siempre mayores que el valor de los pasivos monetarios.

Es de gran importancia para un país asegurar y fortalecer su capacidad para afrontar acontecimientos inesperados, como son los choques financieros exógenos. Estrategias sanas de manejo de reservas conllevan una amplia gama de objetivos de política, tales como:

- asegurar un alto nivel de confianza en las políticas monetaria y cambiaria de la economía, particularmente en regímenes de tipo de cambio fijo;
- mantener divisas líquidas durante los ataques de los choques externos;
- darle confianza a la comunidad internacional de que la economía es capaz de cumplir con sus obligaciones externas.

Particularmente, los depósitos realizados en el Banco Central del Ecuador por instituciones del sector público y del sistema financiero privado, por ser exigibles a la vista, están respaldados por la Reserva Internacional de Libre Disponibilidad (RILD). Ésta, por su carácter de activo de reserva del país y por su tamaño, es el componente de mayor importancia entre los activos del Banco Central del Ecuador.

¹Información proveniente de la Dirección de Estudios del Banco Central de Ecuador.

²Información correspondiente a los Boletines Financieros publicados mensualmente por la Superintendencia de Bancos y Seguros.

Los recursos de la RILD son invertidos, por mandato legal, en los mercados financieros internacionales, bajo los principios de seguridad, liquidez y rentabilidad. Una parte de los rendimientos obtenidos se revierte al Presupuesto General del Estado y otra parte es transferida mensualmen-

te al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS), para mejorar las prestaciones a favor de sus afiliados. Básicamente, la RILD corresponde al monto de activos externos de alta liquidez que tienen una contrapartida en los pasivos del balance del Banco Central del Ecuador³.

Algoritmo 5 Mínimos cuadrados recursivo combinado entrada-salida múltiple

Entrada: $X_{M \times n}$ matriz las variables de entrada

$Y_{M \times H}$ matriz de las variables de salida

K número de iteraciones del algoritmo

R número de reglas (clases o grupos)

$\epsilon_c > 0, m > 1, 0 < \lambda \leq 1$

1: $X_{\min} \leftarrow \min\{x_j, j = 1, \dots, n\}$

2: $X_{\max} \leftarrow \max\{x_j, j = 1, \dots, n\}$

3: $\vartheta_{0j}^l \leftarrow X_{\min,j} + l \left(\frac{X_{\max,j} - X_{\min,j}}{R + 1} \right) \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, R$

4: $\vartheta_{new}^l \leftarrow \vartheta_0^l \quad l \leftarrow 1, \dots, R$

5: **mientras** $|\vartheta_{new}^l - \vartheta_{old}^l| > \epsilon_c \quad i \leftarrow 1, \dots, M, l \leftarrow 1, \dots, R$ **hacer**

6: $\mu_{il}^{new} \leftarrow \left[\sum_{k=1}^R \left(\frac{|x^i - \vartheta_{old}^l|^2}{|x^i - \vartheta_{old}^k|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]^{-1}$

7: $\vartheta_{new}^l \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^M x^i (\mu_{il}^{new})^m}{\sum_{i=1}^M (\mu_{il}^{new})^m}$

8: **fin mientras**

9: $\hat{\theta}(0) \leftarrow 0$

10: $P(0) \leftarrow \alpha I$

11: $\sigma_j^l \leftarrow \sigma \quad j = 1, \dots, n$

12: **para** $i \leftarrow 1, M$ **hacer**

13: **para** $l \leftarrow 1, R$ **hacer**

14: $\mu_{il} \leftarrow \prod_{j=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^i - \vartheta_j^l}{\sigma_j^l} \right)^2 \right]$

15: **fin para**

16: $\zeta_{il} \leftarrow \frac{\mu_{il}}{\sum_{l=1}^R \mu_{il}}$

17: **fin para**

18: **para** $h \leftarrow 1, H$ **hacer**

19: $s \leftarrow 0$ contador auxiliar

20: **para** $k \leftarrow 1, K \times M$ **hacer**

21: **si** $s \leq M$ **entonces**

22: $s \leftarrow s + 1$

23: **si no**

24: $s \leftarrow 1$

25: **fin si**

26: $P_h(k) \leftarrow \frac{1}{\lambda} \left\{ I - P_h(k-1) \zeta(x^s) \left[\lambda I + (\zeta(x^s))^\top P_h(k-1) \zeta(x^s) \right]^{-1} (\zeta(x^s))^\top \right\} P_h(k-1)$

27: $\hat{\theta}_h(k) \leftarrow \hat{\theta}_h(k-1) + P_h(k) \zeta(x^s) \left[y_h^s - (\zeta(x^s))^\top \hat{\theta}_h(k-1) \right]$

28: **fin para**

29: **devolver** $f_h(x | \hat{\theta}_h) \leftarrow \hat{\theta}_h^\top \zeta(x)$

30: **fin para**

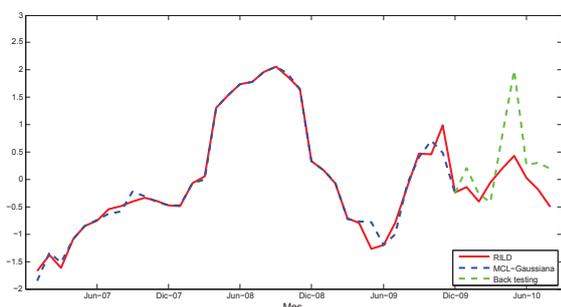
³Antes de adoptar la dolarización en la economía ecuatoriana, el concepto que se manejaba era el de Reserva Monetaria Internacional, el mismo que representaba el saldo entre activos y pasivos externos, y está sujeto al control de las autoridades económicas del país; sus componentes eran: el oro monetario, los derechos especiales de giro, la posición y uso de la reserva en el Fondo Monetario Internacional (FMI), los activos en divisas y otros títulos de crédito.

El Banco Central del Ecuador calcula la reserva monetaria de libre disponibilidad que sirve de base para mantener los sistemas de canje, reserva financiera y otras operaciones del Banco Central del Ecuador, [1].

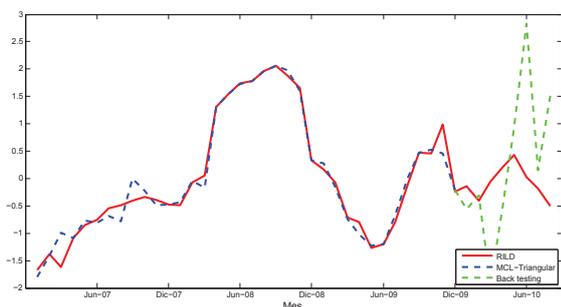
Se propone modelar la RILD, considerando las variables:

Variable	Descripción
Y	Reserva Internacional de Libre Disponibilidad (RILD) de Ecuador
X ₁	Ingresos al sistema financiero
X ₂	Egresos del sistema financiero
X ₃	Exportaciones de petróleo
X ₄	Importaciones de derivados de petróleo

La información corresponde a series mensuales del período enero 2007 - agosto 2010. Para este caso, se considera como conjunto de entrenamiento al período comprendido enero 2007 - diciembre 2009 y, como conjunto de pruebas, (*back testing*) al período enero 2010 - agosto 2010.



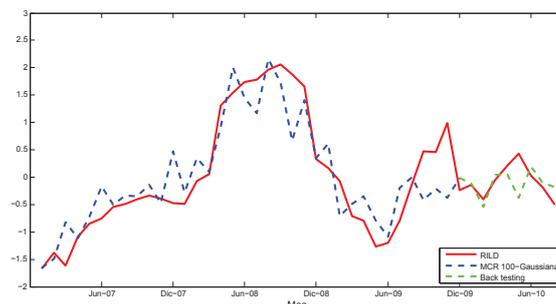
(a) Función gaussiana



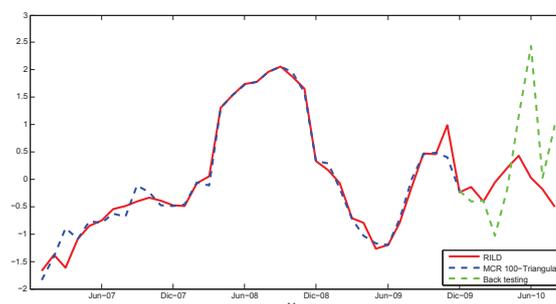
(b) Función triangular

Figura 1. RILD, mínimos cuadrados por lotes (MCL)

La Figura 1 muestra el ajuste para el método de mínimos cuadrados por lotes, con funciones de pertenencia Gaussiana y Triangular, se observa que el ajuste en el conjunto de entrenamiento es bueno para ambas series; sin embargo, en el *back testing*; los pronósticos para ambas series se tornan volátiles.

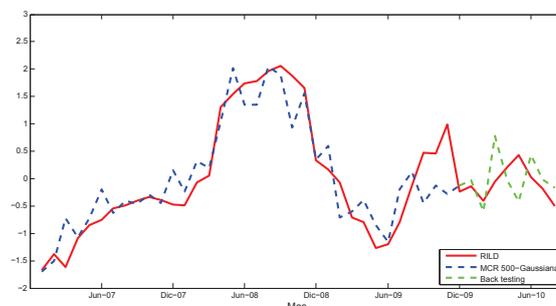


(a) Función gaussiana

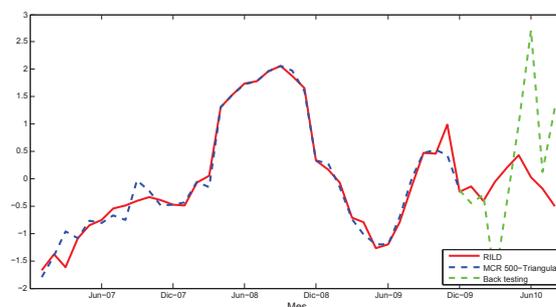


(b) Función triangular

Figura 2. RILD, mínimos cuadrados recursivo 100 iteraciones (MCR)



(a) Función gaussiana

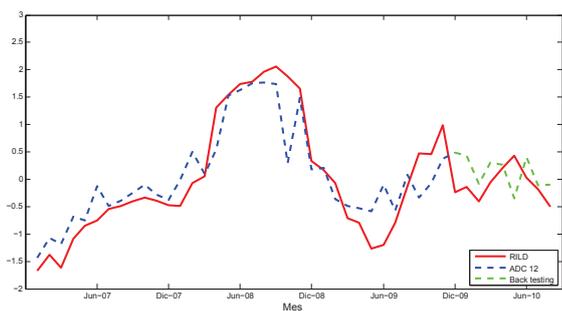


(b) Función triangular

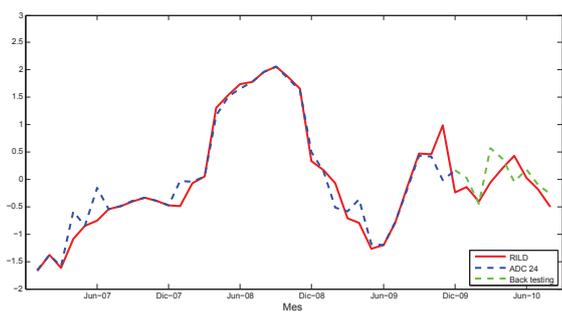
Figura 3. RILD, mínimos cuadrados recursivo 500 iteraciones (MCR)

En el caso del método de mínimos cuadrados recursivo con 100 y 500 iteraciones (Figura 2 y Figura 3 respectivamente), para la función Gaussiana (Figura 2a y Figura 3a), el ajuste en el entrenamiento es un tanto volátil, aún cuando existe una similitud en el comportamiento entre la serie entrenada y la serie original. Al analizar el *back testing*, se nota cierta semejanza con los valores reales de la RILD. En el caso de la función de pertenencia Triangular (Figura 2b y Figura 3b), se observa que el entrenamiento es superior, pero los pronósticos no se asemejan a los de la serie original.

Para el agrupamiento difuso combinado, se utilizaron 12 y 24 centros, los resultados se pueden observar en la Figura 4. En el caso en el cual se utiliza 12 centros (Figura 4a) en el conjunto de entrenamiento, se aprecia una semejanza con la serie original; algo similar ocurre en el *back testing*. Cuando se aumenta a 24 centros (Figura 4b), se observa una mejora muy significativa, tanto en el conjunto de entrenamiento como en el *back testing*, capturándose de mejor manera los cambios de tendencia.

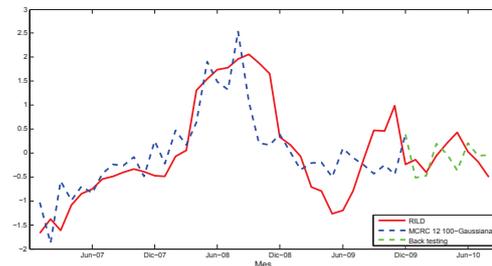


(a) Centros $c = 12$

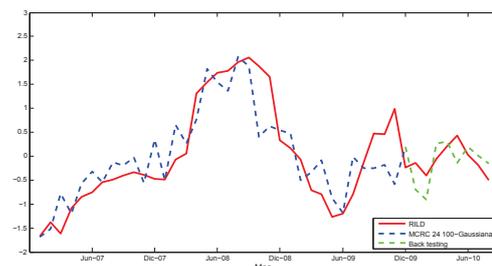


(b) Centros $c = 24$

Figura 4. RILD, agrupamiento difuso combinado (ADC)

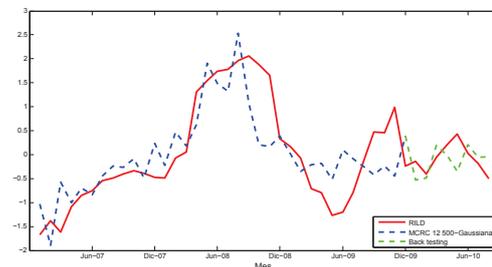


(a) Centros $c = 12$

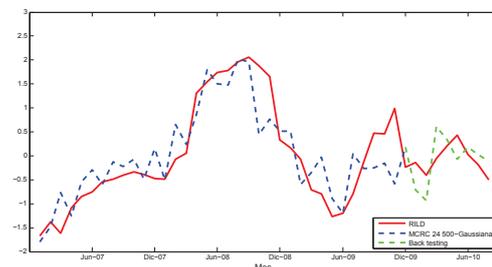


(b) Centros $c = 24$

Figura 5. RILD, mínimos cuadrados recursivo combinado 100 iteraciones (MCRC) Gaussiana



(a) Centros $c = 12$



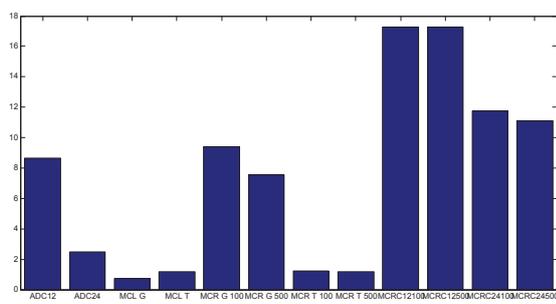
(b) Centros $c = 24$

Figura 6. RILD, mínimos cuadrados recursivo combinado 500 iteraciones (MCRC) Gaussiana

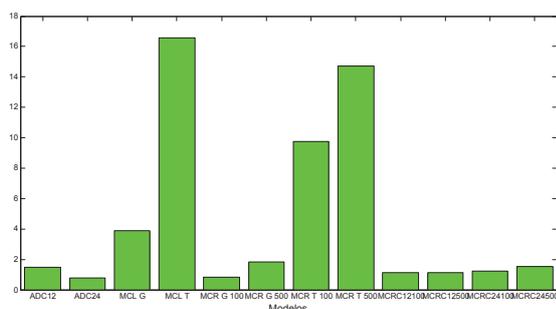
En el método de mínimos cuadrados recursivo combinado con 100 y 500 iteraciones (Figura 5 y Figura 6), se utilizaron 12 y 24 centros. Con 100 iteraciones, el ajuste del conjunto de entrenamiento es similar para 12 y 24 centros; pero cuando se calculan los pronósticos, hay mejores resultados con 12 centros; ver Figura 5a. Lo mismo sucede cuando se incrementa a 500 iteraciones, *i.e.*, con 12 centros los pronósticos se asemejan mucho más a la serie real (Figura 6a).

La Figura 7 presenta, para cada uno de los métodos, la suma de errores del modelo y *back testing*. Los mejores métodos, según estos criterios, son mínimos cuadrados por lotes, agrupamiento difuso combinado 24 (24 grupos) y mínimos cuadrados recursivo combinado 12-100 (12 centros, 100 iteraciones).

Con el objetivo de comparar los resultados de los métodos automáticos, se calculó un modelo SARIMA para la RILD, utilizando el mismo conjunto de entrenamiento. Los resultados del modelo SARIMA muestran que el modelo más apropiado para su estimación y pronóstico es un SARIMA(3, 0, 0)(1, 0, 0). Estos resultados son comparados con los mejores métodos automáticos en la Figura 8. Se puede apreciar que los métodos de mínimos cuadrados por lotes, agrupamiento difuso combinado 24 y el modelo SARIMA son los mejores cuando se ejecuta el entrenamiento (residuos de los modelos); pero, cuando se calculan los pronósticos, los métodos de agrupamiento difuso combinado 24 y mínimos cuadrados recursivo combinado 12-100 son más competitivos.



(a) Residuos de los modelos



(b) Residuos del *back testing*

Figura 7. RILD, residuos de los métodos automáticos y *back testing*

3.2 Índice de Liquidez de Instituciones Financieras

En este apartado se aplican los métodos descritos para un índice de liquidez de los bancos: Pichincha, Internacional y Amazonas, en ejemplos del caso de entrada y salida múltiple.

La liquidez de una institución financiera se refiere a su capacidad de contar con los fondos necesarios para:

- cumplir oportunamente con los compromisos financieros adquiridos, cubrir retiros de depósitos a la vista, pagar una deuda, o pagar a proveedores;
- aprovechar oportunidades de negocio, *i.e.*, compra de cartera, inversión a tasa atractiva, etc.

Cuando una institución enfrenta una escasez de fondos para cumplir con sus obligaciones, tiene la necesidad de conseguir recursos alternativos o de vender activos en condiciones desfavorables, con un alto costo financiero o una elevada tasa de descuento incurriendo en pérdidas de valoración; por esta razón, una institución debe establecer e implementar políticas y procedimientos idóneos que le permitan una adecuada administración de su liquidez, considerando la complejidad y el volumen de las operaciones que realiza. Dichas políticas y procedimientos deben tener en cuenta los posibles escenarios y la forma en la que la institución respondería, en el caso de que tales eventos sean reales [16]. Sin embargo, la preferencia por la liquidez puede ser contraproducente para la economía general; *e.g.*, si hay incertidumbre o los precios decaen, la población en general puede preferir mantener sus activos, tendencia que, si se generaliza, puede llevar a una gran disminución de la demanda.

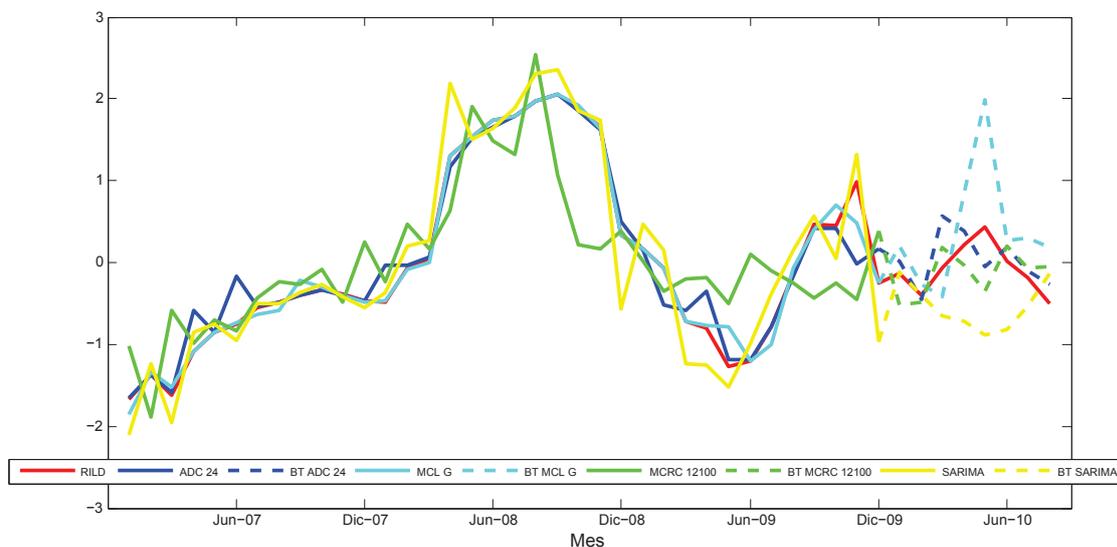
El siguiente modelo considera el índice definido como:

$$\text{Liquidez} = \frac{\text{Fondos disponibles}}{\text{Total de depósitos a corto plazo}}$$

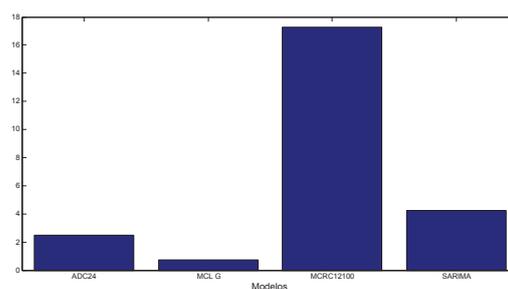
por lo que se consideraron las siguientes variables:

Variable	Descripción
Y_1	Índice de liquidez Banco Pichincha
Y_2	Índice de liquidez Banco Internacional
Y_3	Índice de liquidez Banco Amazonas
X_1	Índice de precios al consumidor
X_2	Inflación

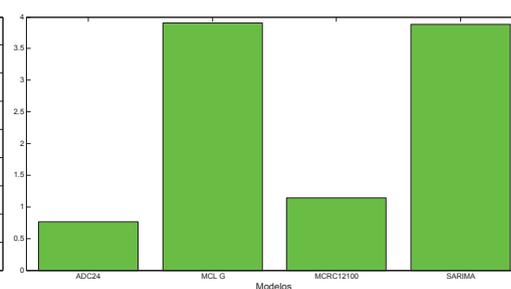
La información corresponde a las series mensuales del período enero 2006 - octubre 2010. Como conjunto de entrenamiento se consideró al período enero 2006 - diciembre 2009 y, como conjunto de *back testing*, al período enero 2010 - octubre 2010.



(a) Contraste

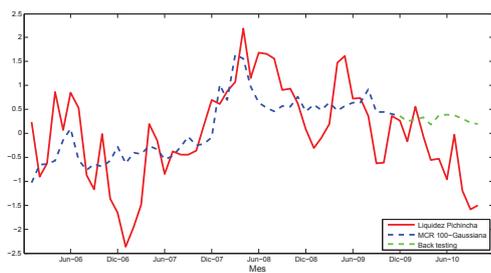


(b) Residuos de los modelos

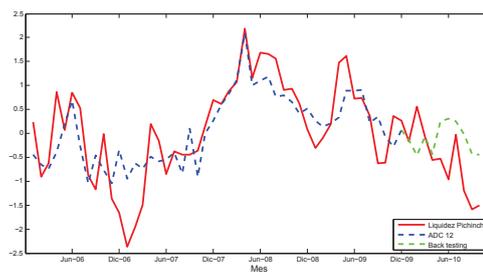


(c) Residuos del back testing

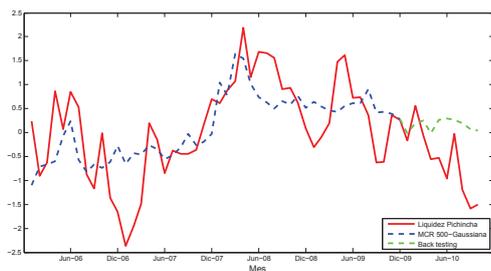
Figura 8. RILD, contraste



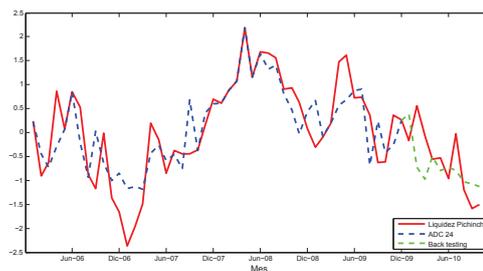
(a) 100 iteraciones



(a) Centros $c = 12$



(b) 500 iteraciones



(b) Centros $c = 24$

Figura 9. Banco Pichincha, mínimos cuadrados recursivo (MCR)

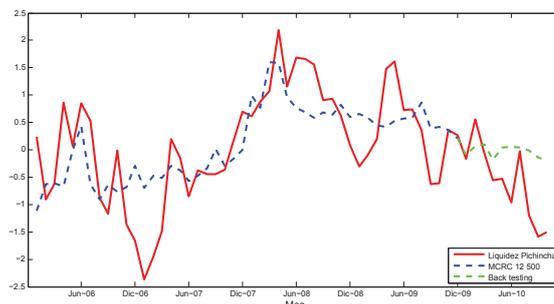
Figura 10. Banco Pichincha, agrupamiento difuso combinado (ADC)

A continuación, se presentan los resultados de los métodos de mínimos cuadrados recursivo, agrupamiento difuso combinado y mínimos cuadrados recursivo combinado para el Banco Pichincha.

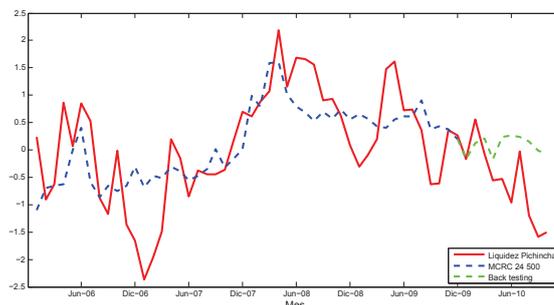
La Figura 9 muestra el ajuste para el método de mínimos cuadrados recursivo con 100 y 500 iteraciones y con función de pertenencia Gaussiana. Se observa que el ajuste en el conjunto de entrenamiento recoge la tendencia de la serie original. Sin embargo, el *back testing* no se asemeja a los valores observados.

Para el agrupamiento difuso combinado, se aplicó 12 y 24 centros; los resultados se observan en la Figura 10. Con 12 centros (Figura 10a) en el conjunto de entrenamiento, se aprecia una semejanza con la serie original; algo similar sucede con los pronósticos en el *back testing*. Pero cuando se incrementa a 24 centros (Figura 10b), se aprecia una mejora significativa tanto en el conjunto de entrenamiento como en el *back testing*.

En el método de mínimos cuadrados recursivo combinado con 100 y 500 iteraciones (Figura 11 y Figura 12), se utilizaron 12 y 24 centros. Con 100 iteraciones el ajuste del conjunto de entrenamiento es muy parecido para 12 y 24 centros; lo mismo ocurre cuando se calcula los pronósticos; en estos casos no se asemejan a la serie del índice de liquidez; ver Figura 11a. Un fenómeno similar ocurre cuando se aumenta a 500 iteraciones (Figura 12a). Esto podría deberse a que el comportamiento de este indicador es muy volátil.

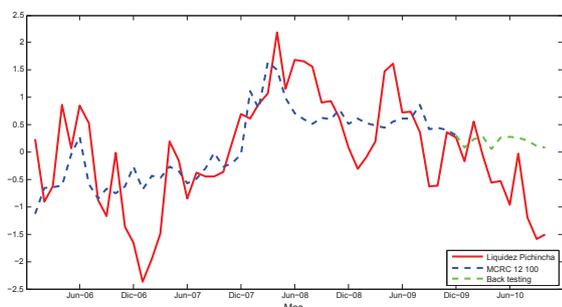


(a) Centros $c = 12$

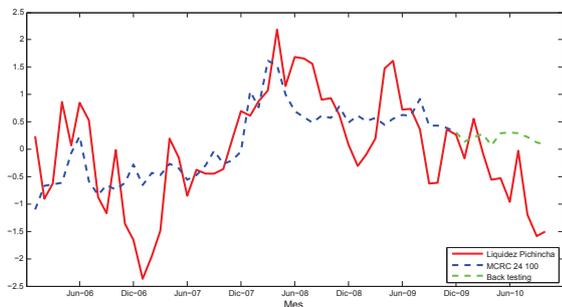


(b) Centros $c = 24$

Figura 12. Banco Pichincha, mínimos cuadrados recursivo combinado 500 iteraciones (MCRC) Gaussiana

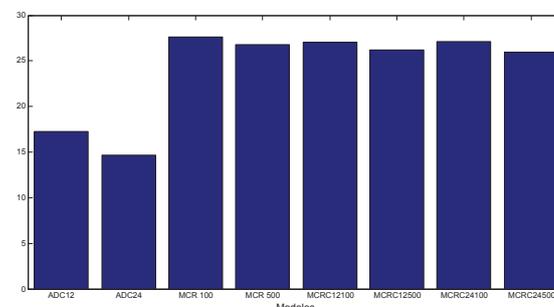


(a) Centros $c = 12$

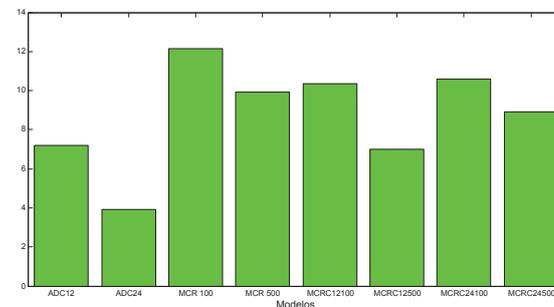


(b) Centros $c = 24$

Figura 11. Banco Pichincha, mínimos cuadrados recursivo combinado 100 iteraciones (MCRC) Gaussiana

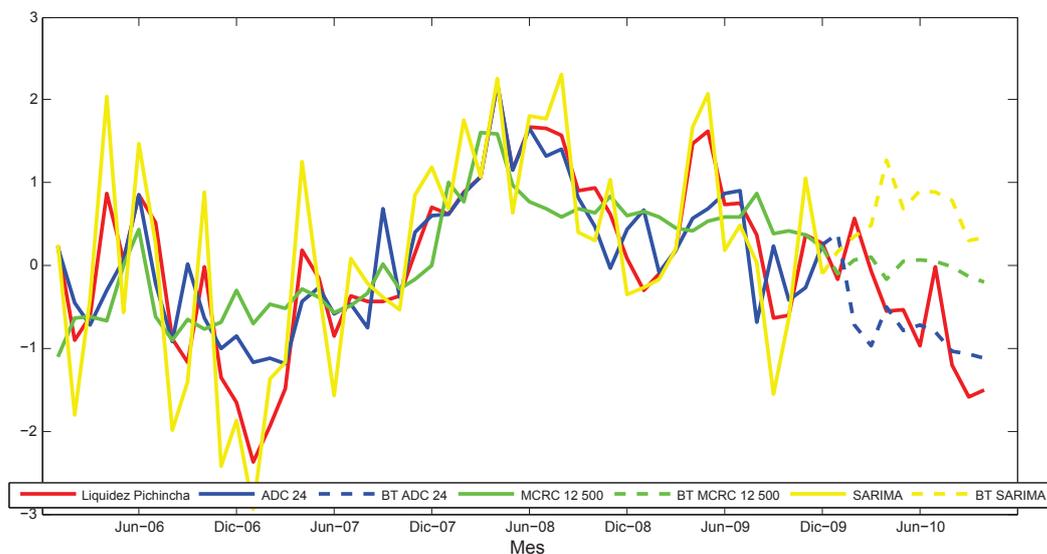


(a) Residuos de los modelos

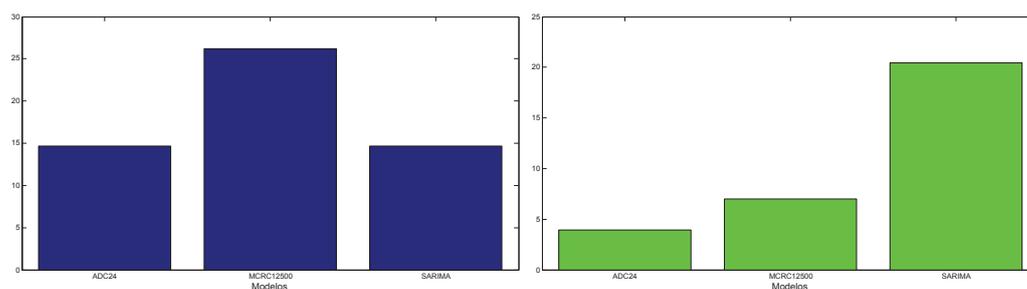


(b) Residuos del *back testing*

Figura 13. Banco Pichincha, residuos de los métodos automáticos y *back testing*



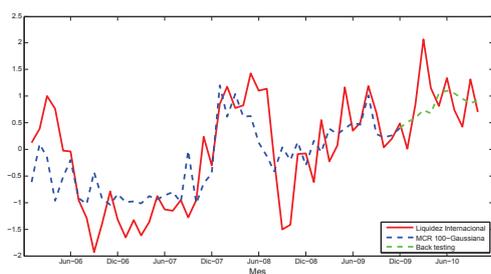
(a) Contraste



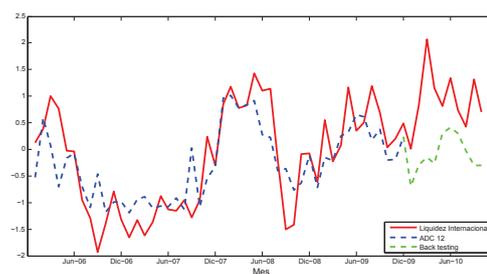
(b) Residuos de los modelos

(c) Residuos del back testing

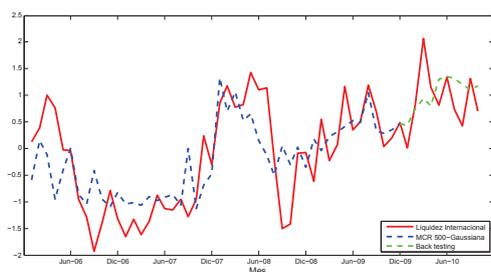
Figura 14. Banco Pichincha contraste



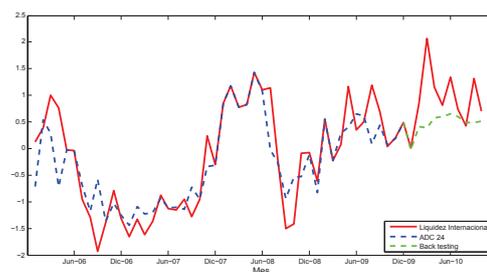
(a) 100 iteraciones



(a) Centros $c = 12$



(b) 500 iteraciones



(b) Centros $c = 24$

Figura 15. Banco Internacional, mínimos cuadrados recursivo (MCR)

Figura 16. Banco Internacional, agrupamiento difuso combinado (ADC)

La Figura 13 presenta para cada uno de los métodos la suma de errores del modelo y *back testing*. Los mejores métodos, según estos criterios, son agrupamiento difuso combinado 24 (24 grupos) y mínimos cuadrados recursivo combinado 12-500 (12 centros, 500 iteraciones).

Finalmente, se calculó el modelo SARIMA para el índice de liquidez del Banco Pichincha utilizando el mismo conjunto de entrenamiento; estos resultados muestran que el modelo más apropiado para su estimación y pronóstico es un SARIMA(0, 1, 0)(2, 0, 0). Este modelo es comparado con los mejores métodos automáticos en la Figura 14. El método de agrupamiento difuso combinado 24 y el modelo SARIMA son los mejores al momento de la estimación (residuos de los modelos); si se evalúan los pronósticos, los métodos de agrupamiento difuso combinado 24 y mínimos cuadrados recursivo combinado 12-500 son más competitivos.

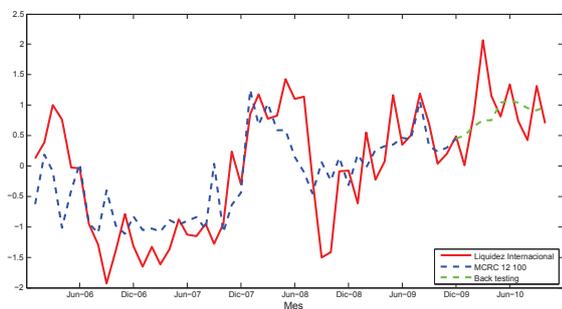
A continuación, se presentan los resultados de los métodos de mínimos cuadrados recursivo, agrupamiento difuso combinado y mínimos cuadrados recursivo combinado para el Banco Internacional.

La Figura 15 muestra el método de mínimos cuadrados recursivo con 100 y 500 iteraciones con función de perte-

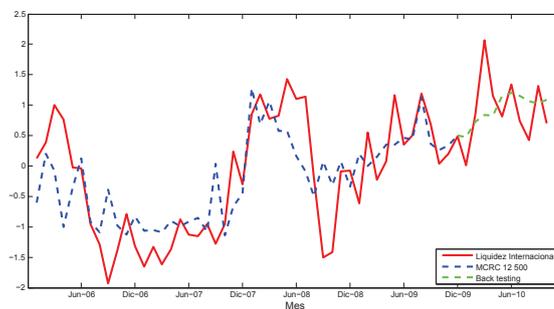
nencia Gaussiana. Se observa que el ajuste en el conjunto de entrenamiento recoge la tendencia de la serie original, y lo mismo ocurre cuando se ejecuta el *back testing*. En este caso no se aprecia ninguna diferencia significativa cuando se varía el número de iteraciones.

Para el método de agrupamiento difuso combinado, se aplicó 12 y 24 centros; los resultados se observan en la Figura 16. Con 12 centros (Figura 16a) en el conjunto de entrenamiento, se aprecia una semejanza con la serie original; lo mismo sucede con el *back testing*. Al incrementar a 24 centros (Figura 16b), se observa una mejora muy significativa en el *back testing*, capturando de manera más adecuada la tendencia de la serie original.

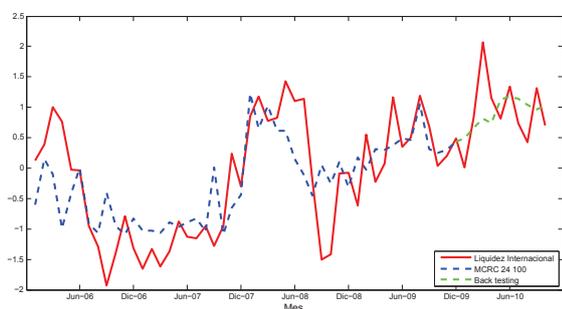
En el método de mínimos cuadrados recursivo combinado con 100 y 500 iteraciones (Figura 17 y Figura 18) se utilizaron 12 y 24 centros. Con 100 iteraciones, el ajuste del conjunto de entrenamiento es muy parecido para 12 y 24 centros; lo mismo ocurre cuando se calcula los pronósticos, ver Figura 17a. De la misma forma, cuando se aumenta a 500 iteraciones, no se observa una mejora significativa (Figura 18a). Aun si el ajuste no se asemeja a la serie, este método modela la tendencia del fenómeno.



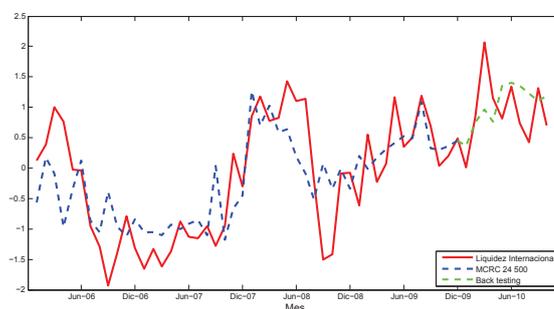
(a) Centros $c = 12$



(a) Centros $c = 12$



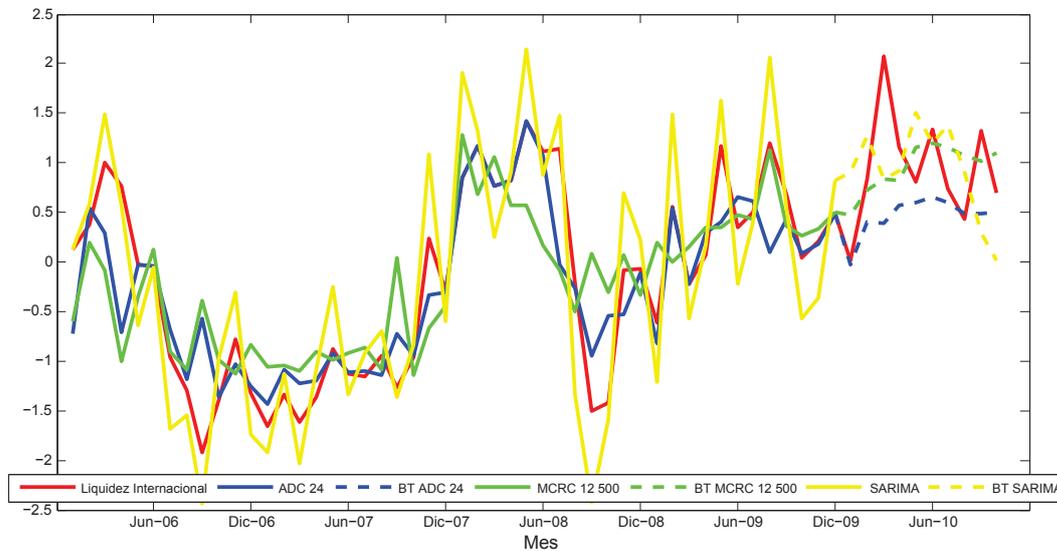
(b) Centros $c = 24$



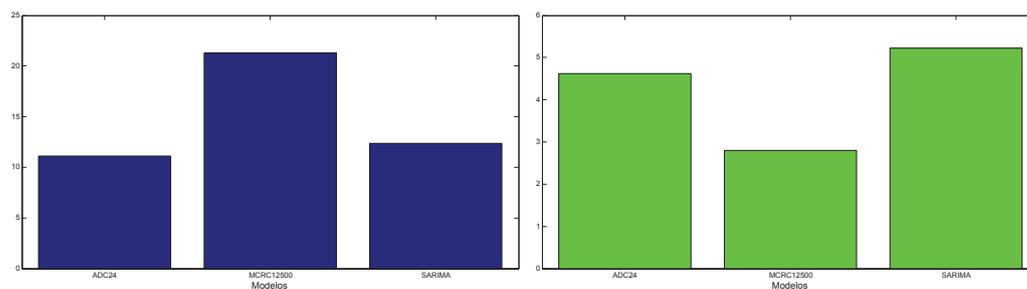
(b) Centros $c = 24$

Figura 17. Banco Internacional, mínimos cuadrados recursivo combinado 100 iteraciones (MCRC) Gaussiana

Figura 18. Banco Internacional, mínimos cuadrados recursivo combinado 500 iteraciones (MCRC) Gaussiana



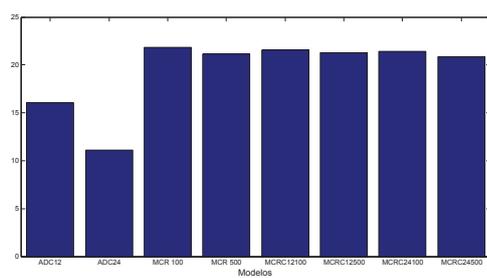
(a) Contraste



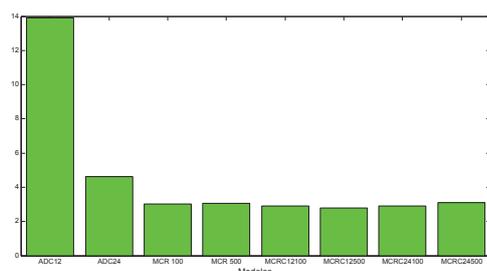
(b) Residuos de los modelos

(c) Residuos del back testing

Figura 19. Banco Internacional, contraste



(a) Residuos de los modelos



(b) Residuos del back testing

Figura 20. Banco Internacional, residuos de los métodos automáticos y back testing

La Figura 20 presenta para cada uno de los métodos la suma de errores del modelo y el *back testing*. Los mejores métodos según estos criterios son agrupamiento difuso combinado 24 (24 grupos) y mínimos cuadrados recursivo combinado 12-500 (12 centros, 500 iteraciones).

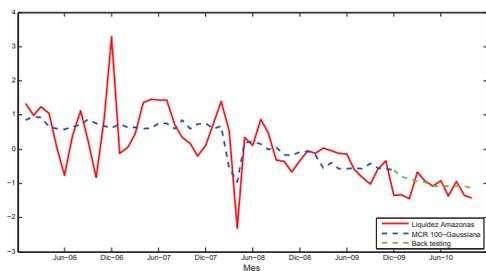
Nuevamente, se calculó un modelo SARIMA para el índice de liquidez del Banco Internacional, utilizando el mismo conjunto de entrenamiento, estos resultados muestran que el modelo más apropiado para su estimación y pronóstico es un SARIMA(0, 1, 0)(0, 0, 2). Este modelo es comparado con los mejores métodos automáticos en la Figura 19. Al igual que al calcular el índice de liquidez de Banco Pichincha, se aprecia que el método de agrupamiento difuso combinado 24 y el modelo SARIMA son los mejores al momento de la estimación (residuos de los modelos); para calcular los pronósticos, el método mínimos cuadrados recursivo combinado 12-500 es más competitivo.

A continuación, se presentan los resultados de los métodos de mínimos cuadrados recursivo, agrupamiento difuso combinado y mínimos cuadrados recursivo combinado para el Banco Amazonas.

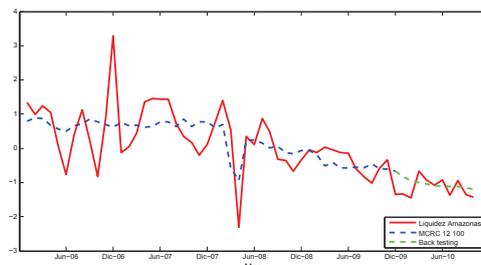
En la Figura 21 se observa el método de mínimos cuadrados recursivo con 100 y 500 iteraciones con función de

pertenencia Gaussiana. El ajuste en el conjunto de entrenamiento recoge la tendencia de la serie original; lo mismo ocurre cuando se ejecuta el *back testing*; nuevamente no se aprecia ninguna diferencia significativa cuando se varía el número de iteraciones.

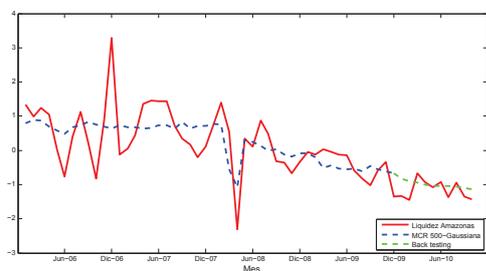
Para el agrupamiento difuso combinado, se utilizó 12 y 24 centros (Figura 22). En este caso se observa que, al incrementar el número de centros a 24, se logra un mejor ajuste en el entrenamiento; ello se refleja en los pronósticos, cuando se aplica el *back testing*.



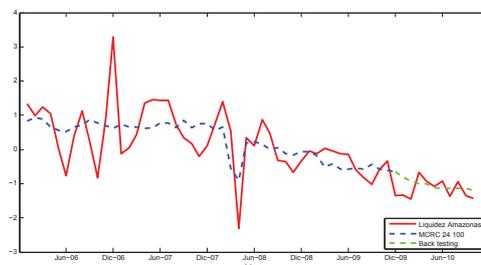
(a) 100 iteraciones



(a) Centros $c = 12$



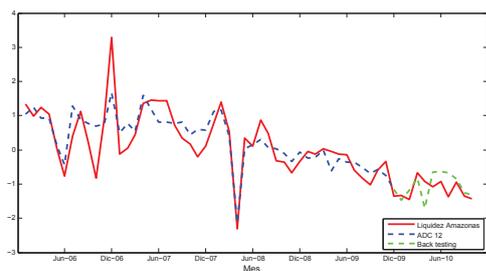
(b) 500 iteraciones



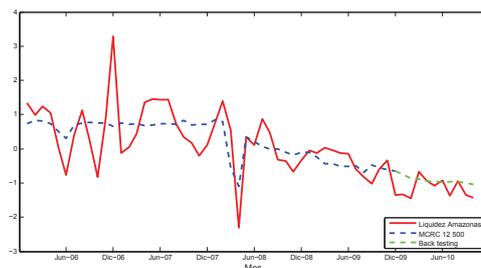
(b) Centros $c = 24$

Figura 21. Banco Amazonas, mínimos cuadrados recursivo (MCR)

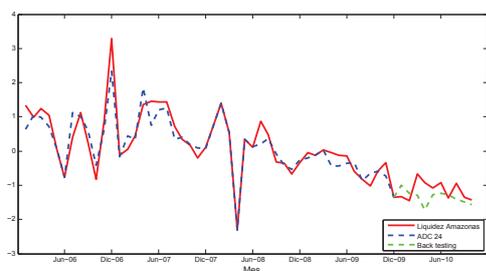
Figura 23. Banco Amazonas, mínimos cuadrados recursivo combinado 100 iteraciones (MCRC) Gaussiana



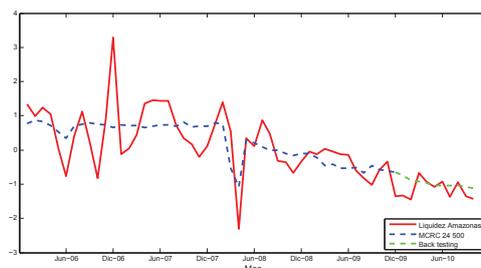
(a) Centros $c = 12$



(a) Centros $c = 12$



(b) Centros $c = 24$



(b) Centros $c = 24$

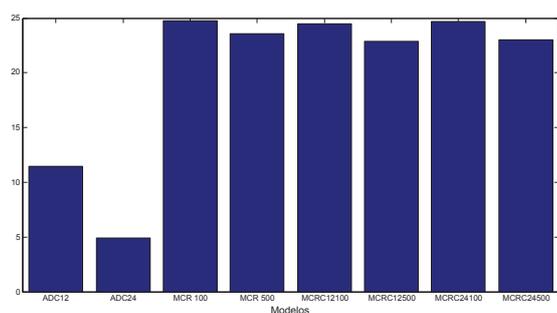
Figura 22. Banco Amazonas, agrupamiento difuso combinado (ADC)

Figura 24. Banco Amazonas, mínimos cuadrados recursivo combinado 500 iteraciones (MCRC) Gaussiana

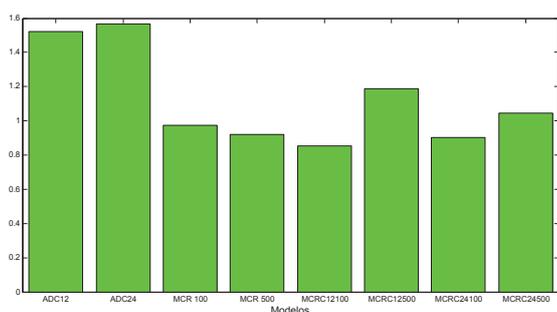
En el método de mínimos cuadrados recursivo combinado con 100 y 500 iteraciones (Figura 17 y Figura 18), se utilizaron 12 y 24 centros. Con 100 iteraciones, el ajuste del conjunto de entrenamiento es muy parecido para 12 y 24 centros; lo mismo ocurre cuando se calcula los pronósticos, el modelo logra ajustar adecuadamente la tendencia de la serie: ver Figura 17a. De la misma forma, cuando se aumenta a 500 iteraciones; no se observa ninguna mejora, Figura 18a.

La Figura 25 presenta para cada uno de los métodos, la suma de errores del modelo, y el *back testing*. Los mejores métodos, según estos criterios, son agrupamiento difuso combinado 24 (24 grupos) y mínimos cuadrados recursivo combinado 12-500 (12 centros, 500 iteraciones).

Al igual que en el caso anterior, se calcula un modelo SARIMA para el índice de liquidez del Banco Amazonas utilizando el mismo conjunto de entrenamiento, estos resultados muestran que el modelo más apropiado para su estimación y pronóstico es un SARIMA(2, 1, 1)(0, 0, 0), este modelo se compara con los mejores métodos automáticos, ver Figura 26. Se puede notar que el método de agrupamiento difuso combinado 24 y el modelo SARIMA son los mejores al momento de la estimación (residuos de los modelos); pero cuando se calculan los pronósticos (residuos del *back testing*), al igual que el índice de liquidez del Inter-nacional, el método mínimos cuadrados recursivo combinado 12-500 es más competitivo.



(a) Residuos de los modelos



(b) Residuos del *back testing*

Figura 25. Banco Amazonas, residuos de los métodos automáticos y *back testing*

4 Conclusiones

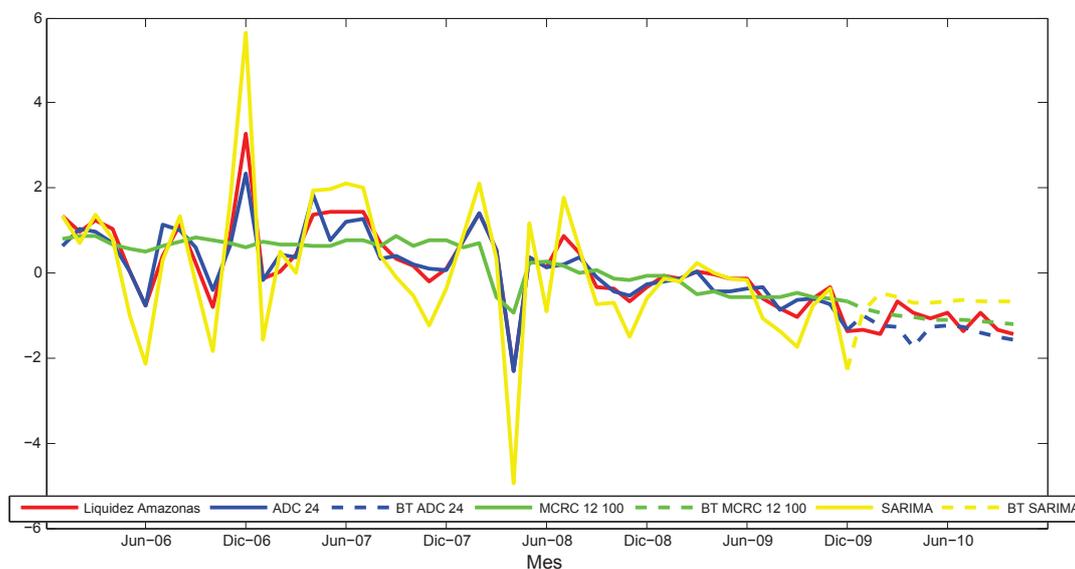
En este trabajo se describen los métodos automáticos de regresión difusa: mínimos cuadrados por lotes, mínimos cuadrados recursivo, aprendizaje desde el ejemplo modificado y agrupamiento difuso combinado. Se generalizan los métodos al caso de entrada y salida múltiple, que permite aplicarlos a una gama más amplia de problemas. Además, se propone un nuevo método, *mínimos cuadrados recursivo combinado*, el cual ha mostrado un gran desempeño, tal como se puede observar en las pruebas numéricas realizadas. En general, los resultados obtenidos corresponden a una medida cuantitativa del potencial de estos métodos en aplicaciones económicas, con resultados muy alentadores.

Como se visualiza en las pruebas numéricas, con un mayor número de observaciones (RILD e índice de liquidez), existe mayor eficiencia al caracterizar la tendencia y sobre todo el *back testing* en los métodos automáticos y, sobre todo, en los métodos combinados y el método propuesto. Esto se debe a que una mayor cantidad de información contribuye al mejoramiento en la construcción de reglas del sistema, lo que caracteriza de mejor manera al fenómeno de estudio. En general, el *back testing* del método propuesto proporciona estimaciones muy competitivas, comparadas con los modelos SARIMA y los métodos de la literatura.

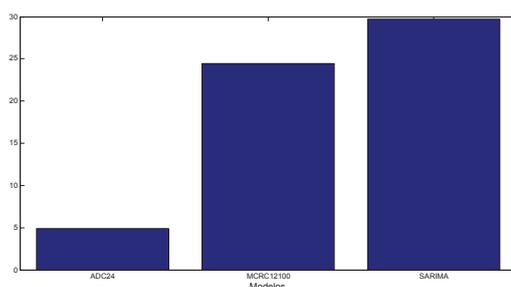
Finalmente, cabe señalar que la precisión requerida y el costo computacional son parámetros que se deben tener en cuenta al momento de decidir que método aplicar, *e.g.*, el método de mínimos cuadrados recursivo no requiere la inversión de una matriz y, por tanto, es más estable numéricamente. Sin embargo, su costo computacional es elevado comparado con el método de mínimos cuadrados por lotes. Por otra parte, la escala de los datos puede causar inestabilidad en los algoritmos. Por esta razón, en general es recomendable estandarizar los datos.

Referencias

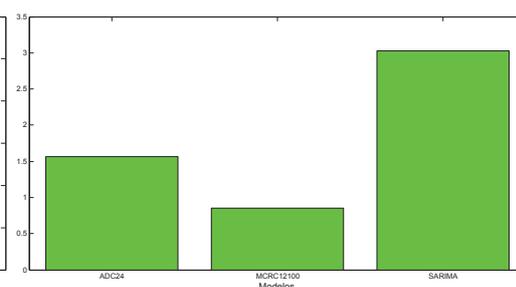
- [1] Banco Central del Ecuador <http://www.bce.fin.ec/>.
- [2] R. Cajamarca. *Regresión automática difusa aplicada a datos económicos*. Escuela Politécnica Nacional Tesis, (2011).
- [3] R. Cajamarca y H. Mena. *Métodos automáticos de regresión difusa - SCRIPT mard para R*. <http://www.math.epn.edu.ec/hmena/>, sección Software, (2011).
- [4] J. Bezdek, J. Keller and R. Krisnapuram. *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing*. Springer Science Business Media, (2005).
- [5] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Mathematics in Science and Engineering, Volume 144, (1980).



(a) Contraste



(b) Residuos de los modelos



(c) Residuos del back testing

Figura 26. Banco Amazonas, contraste

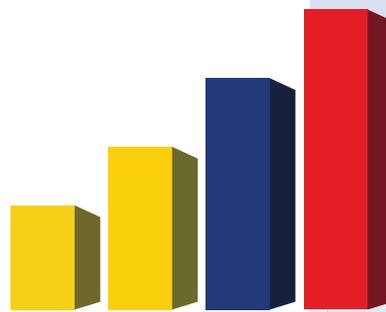
- [6] F. Hayashi. *Econometrics*. Princeton University Press, (2000).
- [7] M. Hayes. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley and Sons, Inc., (1996).
- [8] E. Laukonen and K. Passino. *Training Fuzzy Systems to Perform Estimation and Identification*. Engineering Applications Artificial Intelligence Vol. 8 No. 5 pp. 499-514. Elsevier Science Ltd. Printed in Great Britain, (1995).
- [9] S. Medina and G. Paniagua. *Fuzzy Inference Systems to Creditworthiness Analysis*. Dyna, Año 75, No. 154, pp. 215-229, (2006).
- [10] D. Montgomery and G. Runger. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. Third Edition, John Wiley and Sons, Inc., (2003).
- [11] R. Nagamune. *Intelligent Control*. Department of Mechanical Engineering, University of British Columbia, (2008).
- [12] A. Palit and D. Popovic. *Computational Intelligence in Time Series Forecasting, Theory and Engineering Applications*. Springer-Verlag, (2005).
- [13] K. Passino and S. Yurkovich. *Fuzzy Control*. Addison Wesley Longman, (1998).
- [14] R Project for Statistical Computing, www.r-project.org/.
- [15] T. Ross. *Fuzzy logic with engineering applications*. Second Edition. Wiley, England, (2004).
- [16] Superintendencia de Bancos y Seguros. *Normas Generales para la Aplicación de la Ley General de Instituciones del Sistema Financiero*. Libro I, Título X, Capítulo IV, (2003).
- [17] R. Xu and D. Wunsch II. *Clustering*. John Wiley and Sons, Inc., (2009).
- [18] L. Zadeh. *Fuzzy Sets*. University of California, Berkeley, California, (1965).

Analítica

Un estudio sobre la distribución regional de los préstamos en la Argentina por sector económico, 2000–2010. Una aplicación del análisis de cluster

A study on the regional distribution of loans by economic sector in Argentina, 2000–2010. An application of cluster analysis

Adrián Gutiérrez Cabello y Andrés Salama



www.inec.gob.ec | www.ecuadorencifras.com

Un estudio sobre la distribución regional de los préstamos en la Argentina por sector económico, 2000–2010. Una aplicación del análisis de cluster

A study on the regional distribution of loans by economic sector in Argentina, 2000–2010. An application of cluster analysis

Adrián Gutiérrez Cabello[†] y Andrés Salama[‡]

[†]Universidad Nacional de San Martín, Buenos Aires, Argentina

[†]acabello@unsam.edu.ar, [‡]andres.salama@unsam.edu.ar

Recibido: 29 de septiembre de 2011

Aceptado: 23 de diciembre de 2011

Resumen

En este trabajo, analizaremos el tipo de actividades financiadas por los préstamos en la Argentina en el período 2000 – 2010. Estudiaremos además como fue la distribución de los préstamos en el país y en las provincias de acuerdo al sector productivo que financiaron; así también determinaremos si hay diferencias significativas entre las provincias en esta distribución. Para eso, utilizaremos la metodología de análisis de clúster de acuerdo al Método de Ward.

Como resultado de nuestra investigación, encontramos que existen considerables diferencias entre las distintas provincias en los rubros a los que se dirigen sus préstamos. Se puede observar además un fenómeno que podemos denominar la falta de un "Federalismo Financiero", esto es, la elevada concentración del crédito en la Ciudad de Buenos Aires; ello podría ser factor de alteración en la posibilidad de aplicar políticas públicas de desarrollo a la actividad productiva. El elevado porcentaje de créditos otorgados a personas físicas explica que gran parte del crédito bancario tiene como destino el fomento del consumo, en perjuicio de la actividad productiva. Además esto puede explicarse por el escaso desarrollo de la banca privada en el interior del país, especialmente en las provincias con bajos nivel de crecimiento o escasa población; las excepciones son algunas provincias con economías regionales desarrolladas como lo pueden ser Córdoba y Santa Fe, en las cuales se observa claramente cómo se canaliza el crédito de las entidades locales.

Palabras clave: sector bancario, clusters, crédito.

Abstract

This paper analyzes some of the activities financed by loans in Argentina, from 2000 to 2010. It studies the distribution of loans in Argentinean provinces, according to the economic sector they had financed; and whether there were significant differences between provinces in such distribution, employing cluster analysis, according to Ward's method.

The research concludes there are considerable differences among Argentina's provinces, regarding the activities that were financed by loans. Another observed phenomenon is the lack of financial federalism -the high concentration of credit in Buenos Aires could impede applying public policies for the development of productive activities. The high percentage of credits given to natural persons explains how a large fraction of bank loans are destined to personal consumption, rather to productive investment. This could also be explained by the low growth in private banking in the interior of the country, especially in less developed provinces or with scarce population; this with the exception of few provinces having more developed regional economies, such as Cordoba and Santa Fe, that clearly show the local placement of credit.

Keywords: banking sector, clusters, credit.

Código JEL: G21, C02, C10, C13, C58, E20, E41.

1 Introducción

En este trabajo, se analiza el tipo de actividades que financian los préstamos en la Argentina. Concretamente, se busca ver como es la distribución de los préstamos en el país y en las provincias de acuerdo al sector productivo que financian; así también determinar si hay diferencias significativas entre las provincias en esta distribución. Para eso, utilizaremos la metodología de análisis de clúster de acuerdo al Método de Ward.

2 Marco Teórico o Metodología utilizada

El análisis de clúster o conglomerados es una técnica diseñada para clasificar distintas observaciones en grupos de tal forma que,

1. Cada grupo (conglomerados o clúster) sea homogéneo respecto a las variables utilizadas para caracterizarlos; es decir, que cada observación contenida en él sea parecida a todas las que estén incluidas en ese grupo.
2. Que los grupos sean lo más distintos posibles unos de otros, respecto a las variables consideradas.

El análisis establece dichos grupos basándose en la similitud que presenta un conjunto de entidades respecto de una serie de características que el investigador ha especificado previamente. Al final, se extrae los grupos de sujetos y sus características definitorias: número de segmentos, número de integrantes de cada segmento. Si las variables de aglomeración están en escalas muy diferentes, será necesario estandarizarlas previamente. Es necesario observar también los valores atípicos y desaparecidos, porque los métodos jerárquicos no tienen solución con valores perdidos, y porque los valores atípicos deforman distancias y producen clúster unitarios. Es perjudicial la presencia de variables correlacionadas, por lo que es conveniente realizar primero un análisis de multicolinealidad. Los conglomerados deben tener sentido conceptual y no variar mucho al cambiar la muestra o método de aglomeración.

Para la formación de clúster en este trabajo se utilizó la técnica de *Análisis de Clúster Jerárquico*, con el *Método de Ward*, que tiene por objeto maximizar la homogeneidad dentro de cada conglomerado. Para ello, plantea todas las posibles combinaciones de observaciones para el número de grupos que se esté considerando en cada etapa concreta.

Este método, propuesto por Ward en 1963 es uno de los más utilizados en la práctica; posee casi todas las ventajas del método de la media, y suele ser más discriminativo en

la determinación de los niveles de agrupación. Este método, además, es capaz de encontrar mejor una clasificación óptima en comparación con otros métodos.¹

Ward propuso que la pérdida de información que se produce al integrar los distintos individuos en clústeres puede medirse a base de la suma total de los cuadrados de las desviaciones entre cada punto (individuo) y la media del clúster en el que se integra. Para que el proceso de "clusterización" resultara óptimo, en el sentido de que los grupos formados no distorsionen los datos originales, proponía la siguiente estrategia: en cada paso del análisis, considerar la posibilidad de la unión de cada par de grupos y optar por la fusión de aquellos dos grupos que menos incrementasen la suma de los cuadrados de las desviaciones al unirse.

La ventaja del método de Ward es que no deja ningún tipo de "cabos sueltos". No quedan formados grupos que tengan uno o muy pocos elementos. Todos los datos se agrupan en clústeres que tienen varios elementos. Así, las principales ventajas del método de Ward son: la formación de clústeres más compactos y de similar tamaño y la minimización de la pérdida de información en el proceso de organización de los conglomerados.

La medida de similitud a base de la cual se formaron los grupos fue la *distancia*, esto es, las distintas medidas entre los puntos del espacio definido por los individuos. La *distancia euclídea al cuadrado* es la medida utilizada para la formación de conglomerados en este trabajo y se expresa:

$$\text{distancia euclídea al cuadrado } d(i, j)^2 = \sum_k (x_{ik} - x_{jk})^2.$$

Se observa que la distancia euclídea al cuadrado entre dos individuos se define como la suma de los cuadrados de las diferencias de todas las coordenadas de los dos puntos. Para la determinación de los grupos se hace uso del gráfico denominado *dendograma*, que puede emplearse para evaluar la cohesión de los conglomerados que se han formado y proporcionar información sobre el número adecuado de conglomerados que deben conservarse.

El tipo de variable utilizada en este trabajo es métrica y es la participación de cada sector económico, a nivel provincial en la demanda de créditos bancarios. El software utilizado para realizar los conglomerados y el resto del análisis fue el SPSS.

3 Aplicación o Resultados

3.1 La demanda de crédito

El destino del crédito puede dividirse en tres categorías. La primera es el capital necesario para montar un nuevo negocio o para expandir considerablemente las líneas de producción existentes: El mercado de crédito que satisface estas necesidades se denomina de capital fijo: capital que se

¹Ver [11].

destina a la compra y organización de factores fijos, como fábricas, procesos de producción, máquinas o depósitos.

En segundo lugar, está el crédito para realizar una actividad productiva que está en marcha. Éste es necesario porque suelen existir desfases entre los gastos que exige la producción normal, y los ingresos generados por las ventas. Cuando el producto está terminado con la venta se cancela el préstamo. Este mercado se denomina de capital circulante, o de capital de trabajo.

Finalmente, un tercer tipo de crédito es el de consumo (que incluye al crédito hipotecario); normalmente es solicitado por las personas cuando tienen un aumento en sus necesidades de consumo.

Aunque el crédito para adquirir capital fijo influye considerablemente en el crecimiento global de la economía, el crédito para adquirir capital circulante y el de consumo son fundamentales para comprender cómo ayuda la economía a las personas. Por ejemplo, la estacionalidad que tiene la actividad agropecuaria, aumenta la importancia del capital circulante en la producción.

3.2 Préstamos y actividad económica

Comparando los años 2000 y 2010 se observan importantes diferencias en las estructuras, tanto de Producto Bruto Interno (PBI) como de la composición de los préstamos por actividad y la participación de los mismos en cada uno de los sectores económicos.

Analizando el PBI real entre esos años, la economía creció el 53%; pero si se considera la etapa 2002-2010, este indicador se incrementó el 79%, debido a la fuerte caída que tuvo la actividad económica en los años 2001 y 2002, y que provocó el fin del régimen de Convertibilidad.

El PBI² en el año 2000 alcanzó los 284 mil millones de pesos corrientes. Analizando la estructura productiva nacional a partir del valor agregado por cada actividad, se

observa que la industria fue el sector más importante, ya que generó el 17,5% de la producción de bienes y servicios; le siguen los servicios inmobiliarios, empresariales y de alquiler (16,6%). En conjunto, los sectores productores de bienes agrupaban cerca de un tercio del valor agregado y las actividades ligadas a la agricultura sumaban cerca del 5%.

Pasada una década, en el año 2010, hubo cierto cambio en la participación de los distintos sectores económicos en la generación de valor agregado, medido a precios corrientes. La industria pasó a representar un quinto de la economía; la actividad agropecuaria a partir de la combinación de los efectos precios y cantidades, ve duplicada su participación (9,8%). El segundo sector en importancia, corresponde a servicios inmobiliarios, empresariales y de alquiler (10,6%).

Como se observa tras la salida de la Convertibilidad, los cambios en los precios relativos favorecieron al sector productor de bienes, aunque también hubo un importante crecimiento (superior a la media en este conjunto de actividades económicas).

En relación a los préstamos, se observa que, en el año 2000, éstos ascendían aproximadamente a 81.000 millones de pesos, siendo la relación préstamos/PBI de 0,285. En el año 2010 midiendo todas las variables a precios corrientes, se observa que el stock de préstamos fue de 169.523 millones de pesos, en tanto que la relación préstamos/depósitos descendió sensiblemente a 0,118.

De esto se deriva que la economía sufrió un proceso de alejamiento del sistema bancario en la búsqueda de financiamiento. Como efecto de la crisis de los años 2001 y 2002, con la aplicación de la pesificación de los préstamos y depósitos, sumados a la imposibilidad de retirar los ahorros y el reemplazo compulsivo de estos, principalmente los de moneda extranjera, por bonos a diez años.

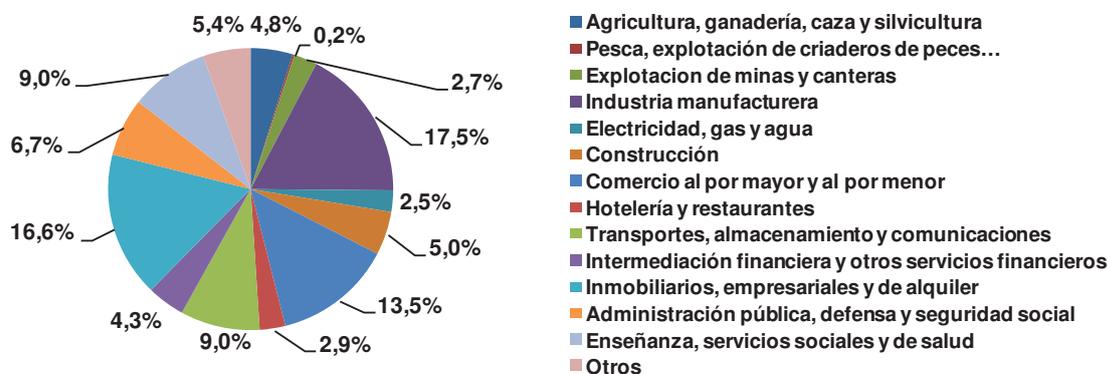


Figura 1. Participación por actividad en el Valor Agregado – Año 2000 (Elaboración propia en base a INDEC).

²El PBI incluye el valor agregado de las actividades más el Impuesto al Valor Agregado e Impuestos a las Importaciones.

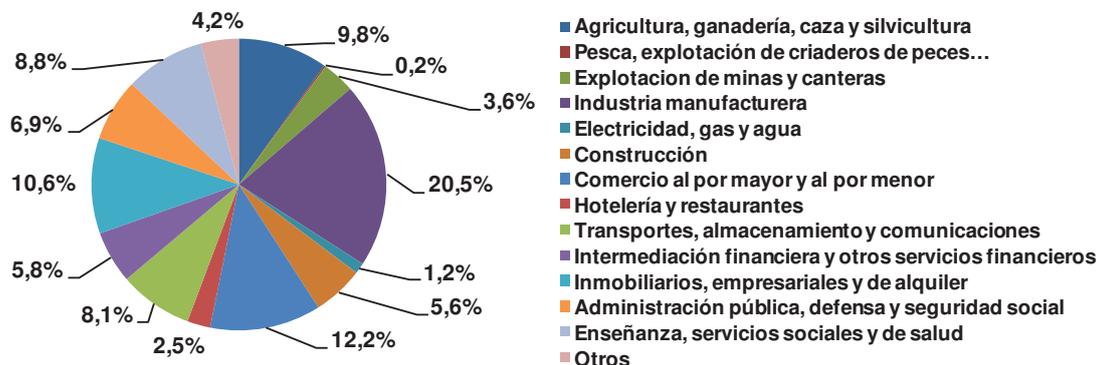


Figura 2. Participación por actividad en el Valor Agregado – Año 2010 (propia en base a INDEC).

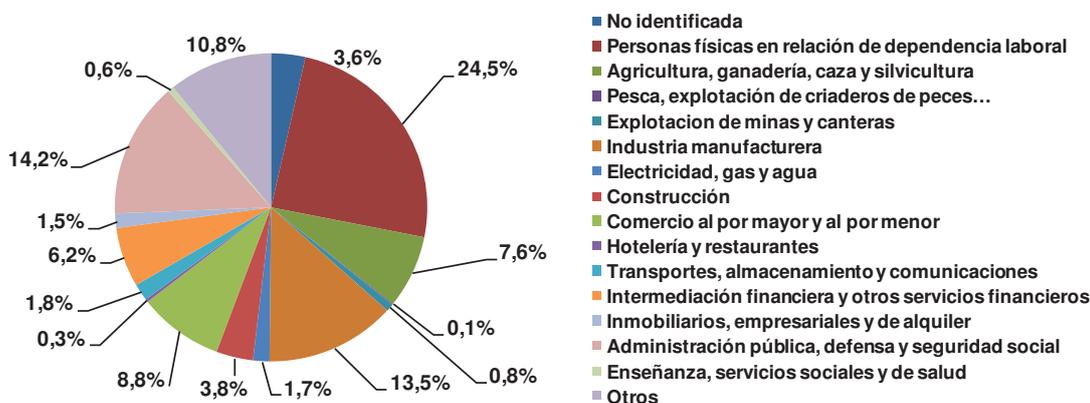


Figura 3. Participación de los préstamos por sector – Año 2000 (Elaboración propia en base a INDEC).

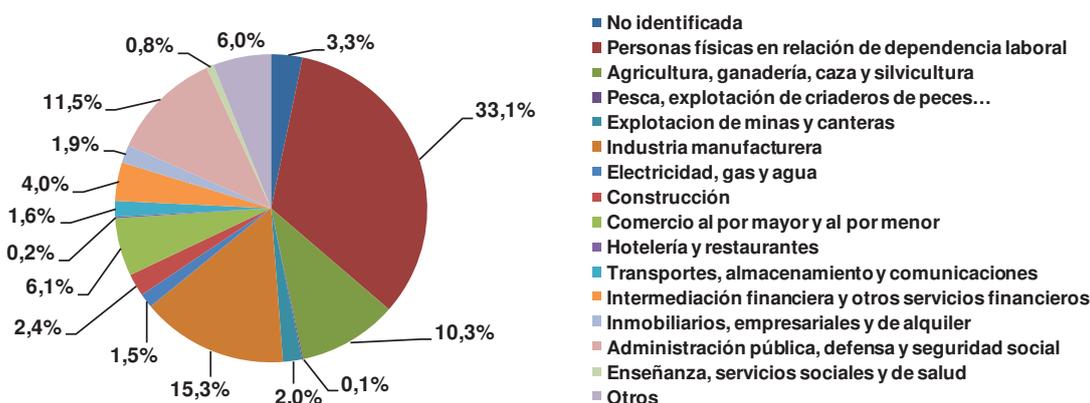


Figura 4. Participación de los préstamos por sector – Año 2010 (Elaboración propia en base a INDEC).

Por lo tanto, si bien a precios corrientes se duplicó la masa crediticia, deflactando los préstamos por el Índice de Precios Implícitos del PBI, aquella cayó en términos reales el 37%.

Es posible inferir que los sectores productivos desde el 2002 reemplazan el financiamiento bancario, por otros mecanismos, tales como mercado de capitales, proveedores o a través de recursos propios.

En el año 2000, los principales destinatarios de los créditos eran las personas físicas en relación de dependencia laboral, con casi un cuarto del volumen de préstamos. Se ubicaban en segundo lugar, como demandantes de créditos, la administración pública, los organismos de defensa y la seguridad social (14,2%). Entre los sectores productores de bienes, se encontraban: la industria manufacturera con el 13,2%, y el agropecuario con el 7,6%. Entre los sectores productores de servicios, se destacan el comercio al por mayor y al por menor (8,8%), la intermediación financiera y otros servicios financieros (6,2%).

Para el año 2010 se observan algunos cambios en la composición de la cartera de créditos del sistema bancario. Los sectores productores de bienes incrementaron su participación especialmente los de agricultura, ganadería, caza y silvicultura, con alrededor del 10%, y la industria manufacturera el 15%.

Como se observa al igual que el PBI, el stock de créditos

se vio modificado en términos relativos por los cambios de los precios relativos y la mayor actividad que se registra en los sectores productores de bienes. En el año 2000, los préstamos personales eran 24,53% del total de préstamos, indicando que subieron 11 puntos porcentuales en diez años. Los préstamos a la producción primaria ascendieron también 4 puntos porcentuales, ya que estaba en un 8,53% en el año 2000. La industria manufacturera vio como los préstamos que le eran destinados subieron dos puntos porcentuales durante la década (del 13% al 15%).

Los préstamos al sector servicios, en cambio, bajaron casi diez puntos porcentuales en estos diez años, del 35,46% al 26,04%. De modo similar, los préstamos a las empresas dedicadas al comercio bajaron casi tres puntos porcentuales en la década pasada, de casi un 9% del total de préstamos al 6%. Vemos esta evolución de los distintos sectores en el siguiente gráfico:

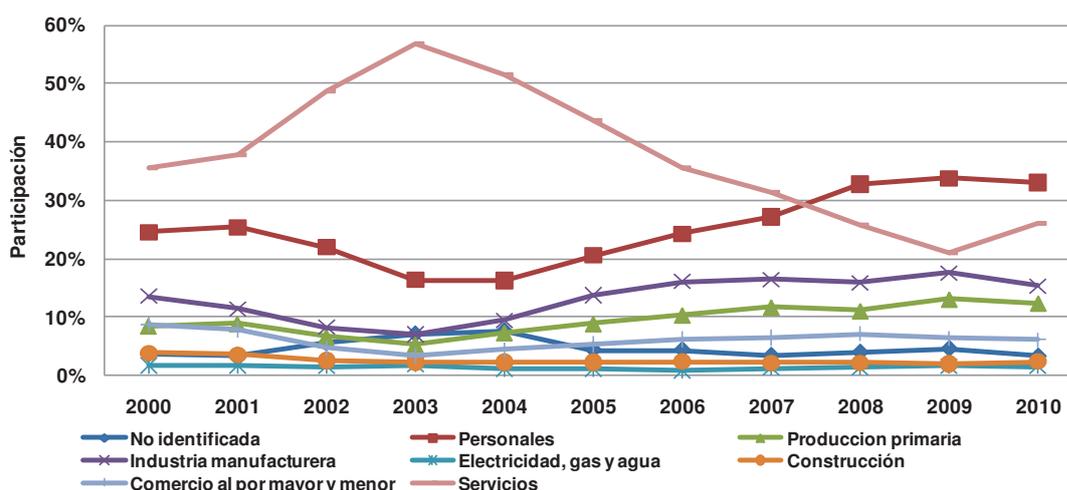


Figura 5. Evolución de los préstamos a distintos sectores en términos porcentuales, período 2000–2010 (Elaboración propia fuente BCRA).

Se observa cómo han caído los préstamos al sector servicios; han subido casi diez puntos porcentuales los préstamos personales, después de bajar en los años inmediatamente posteriores al fin de la convertibilidad; por otra parte, han subido ligeramente los préstamos a la producción primaria y a la industria manufacturera. Los demás rubros se mantuvieron en porcentajes menores al 10% y en niveles relativamente similares.

También querríamos saber si la distribución de los préstamos entre los distintos sectores es parecida en todas las provincias. Si vemos la distribución de los préstamos en el principal distrito del país, la provincia de Buenos Aires, tendremos los porcentajes que se observan en la siguiente tabla.

Sector	2010
No identificada	3,07%
Personales	54,08%
Producción Primaria	12,35%
Industria Manufacturera	9,75%
Electricidad, gas y agua	0,20%
Construcción	0,77%
Comercio al por mayor y menor	6,82%
Servicios	12,97%
Total	100,00%

Tabla 1. Destino préstamos por fin sectorial provincia Buenos Aires, año 2010 (Elaboración propia fuente BCRA).

Vemos aquí que los préstamos personales en la provincia de Buenos Aires son superiores al promedio nacional en el año 2010; los préstamos a la producción primaria están aproximadamente en el mismo nivel; los préstamos a la industria manufacturera son inferiores (un 9,75 % en la provincia de Buenos Aires contra el 15 % nacional), lo mismo que los préstamos al sector servicios (son casi el 13 % en la provincia de Buenos Aires, contra el 26 % a nivel nacional).

Otro territorio interesante de analizar, en cuanto a los préstamos recibidos, es la ciudad de Buenos Aires. Veamos cuales han sido el porcentaje de préstamos en la Tabla 2.

Sector	2010
No identificada	4,48 %
Personales	22,05 %
Producción Primaria	9,82 %
Industria Manufacturera	19,10 %
Electricidad, gas y agua	2,24 %
Construcción	2,22 %
Comercio al por mayor y menor	5,04 %
Servicios	35,04 %
Total	100,00 %

Tabla 2. Destino préstamos por fin sectorial en la ciudad de Buenos Aires, año 2010 (Elaboración propia fuente BCRA).

Se aprecia que el 22 % de los préstamos se destinaron a los préstamos personales (bastante menos que en el país y en la provincia de Buenos Aires). Es de destacar también que el 9 % de los préstamos se destinó a la producción primaria, ligeramente menor al 12 % del resto del país y de la provincia de Buenos Aires.

Este dato puede resultar curioso, ya que la ciudad de Buenos Aires, un territorio enteramente urbanizado, no tiene producción primaria. Sin embargo, ello se explica porque muchas de las casas centrales de empresas que se dedican a la producción primaria se encuentran radicadas en la ciudad de Buenos Aires, con lo cual los préstamos aparecen correspondientes a esta ciudad. 19 % de ellos se destinaron a empresas manufactureras, porcentaje mayor al visto en el país y en la provincia de Buenos Aires. Esto no es de extrañar, ya que muchas empresas industriales también tienen su sede central en la ciudad capital del país, aunque sus plantas se encuentren en otros lugares. Un 35 % de los préstamos se destinan a las empresas del sector servicios. Esta cifra es similar a la que se observa en la provincia de Buenos Aires, pero es mayor al porcentaje para todo el país. La proporción de préstamos que reciben las empresas dedicadas al comercio (un 5 %) es ligeramente menor al 6 % que se observa en el país y en la provincia de Buenos Aires.

Nos gustaría saber qué provincias se destacan por tener la mayor proporción y la menor proporción de préstamos a cada sector. En 2010, por ejemplo, la mayor proporción de préstamos a la industria manufacturera se dio en la ciudad

de Buenos Aires, con el 19,10 % de todos los préstamos; la menor en Formosa, con el 0,75 %. Este resultado es natural, si uno considera que la ciudad de Buenos Aires es sede de muchas empresas manufactureras (aún si las plantas estén ubicadas en otros territorios), mientras que un Formosa ocupa un lugar marginal en cuanto a su relevancia económica.

La mayor proporción de préstamos a la producción primaria se dio en la provincia de La Pampa, con el 33,91 % de ellos. Tal resultado no es demasiado sorprendente, ya que la economía de La Pampa se basa en gran parte en la producción agropecuaria. El menor porcentaje de préstamos a la producción primaria se dio en Formosa, con el 1,33 %. Formosa tuvo también el mayor porcentaje de préstamos personales (el 88,29 % de todos los préstamos). Este monto elevado sugiere que en esa provincia, muchas empresas sacan préstamos a nombre de sus dueños. El menor porcentaje de préstamos personales se dio en la ciudad de Buenos Aires, donde estos fueron el 22,05 % del total. Esto puede sugerir una operatoria bancaria mas transparente en la capital del país, ya que no hay necesidad de simular el destino de los préstamos.

Otros datos curiosos muestran que el mayor porcentaje de préstamos a la construcción se dio en la provincia de Santa Cruz, con el 25,46 % del total dirigido a este sector. Esto puede sugerir de un boom inmobiliario en esa provincia. El menor porcentaje de préstamos a la construcción se dio en la provincia de Buenos Aires, con el 0,77 % de todos los préstamos.

El mayor porcentaje de préstamos destinados al sector servicios se dio en la ciudad de Buenos Aires, con el 35,04 %; el menor porcentaje otorgado fue en la provincia de Catamarca, con el 3,94 %.

3.3 Formación de conglomerados

Se dijo que el objetivo del trabajo era determinar si hay diferencias entre provincias argentinas en la participación del destino de los préstamos bancarios, de acuerdo a la actividad económica. Se formaron los clusters a partir de los datos suministrados por el Banco Central de la República Argentina (B.C.R.A.) para el primer trimestre de 2010; las variables que se utilizaron, fueron el destino de los préstamos por actividad económica, como se detallan a continuación:

- No identificada.
- Personas físicas en relación de dependencia laboral.
- Agricultura, ganadería, caza y silvicultura.
- Pesca, explotación de criaderos de peces.
- Explotación de minas y canteras.
- Industria manufacturera.
- Electricidad, gas y agua.

- Construcción.
- Comercio al por mayor y al por menor.
- Hotelería y restaurantes.
- Transportes, almacenamiento y comunicaciones.
- Intermediación financiera y otros servicios financieros.
- Inmobiliarios, empresariales y de alquiler.
- Administración pública, defensa y seguridad social.

- Enseñanza, servicios sociales y de salud.
- Otros.

Para cada provincia, se tiene cual es la participación de estos sectores. Los grupos formados son los más homogéneos posible, por lo tanto las provincias o regiones que lo conforman son muy parecidas en la estructura crediticia por sector económico. En el anexo, se observa el promedio simple de la participación de cada sector en los conglomerados. Se aprecia que el principal destino de los préstamos bancario es el financiamiento a personas físicas en relación de dependencia laboral.

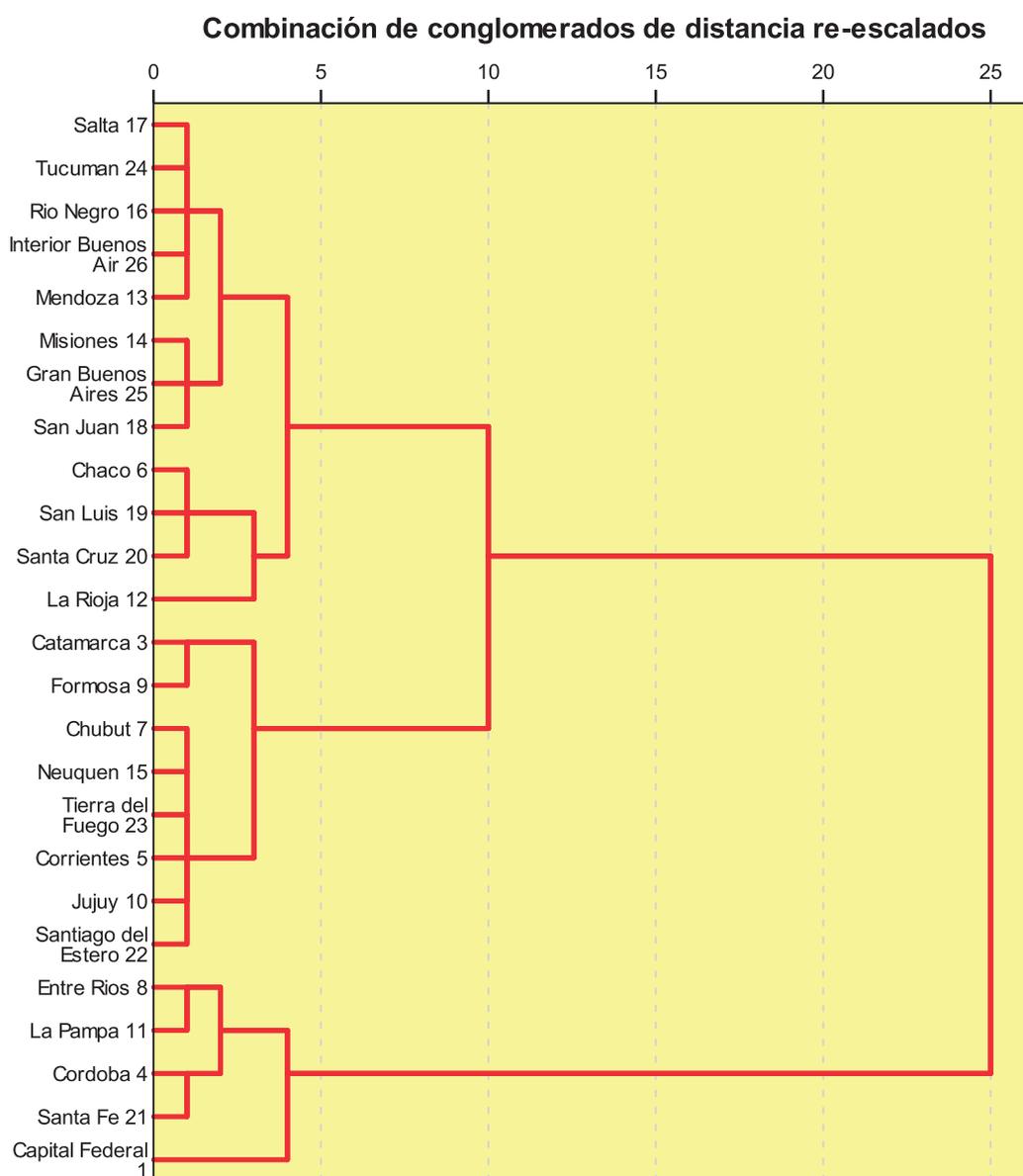


Figura 6. Dendrograma que utiliza una vinculación de Ward (Elaboración propia).

El análisis de los promedios simples de las participaciones permite determinar el grado de homogeneidad que tienen los grupos, medido a través del coeficiente de variación, y definido como:

$$\text{Coeficiente de variación } cv = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

donde:

$$\sigma = \text{desvío estándar,} \quad (1)$$

$$\bar{x} = \text{media.} \quad (2)$$

Los datos para Provincia de Buenos Aires están divididos en Conurbano e Interior; dadas las distintas características que tienen ambas zonas, en el proceso de conformación de los conjuntos la información es procesada por regiones, sin considerar la provincia en su conjunto. Las diferencias mencionadas entre el Conurbano y el Interior de Buenos Aires quedan en evidencia al ver que están en distintos conglomerados.

3.4 Número de conglomerados

El análisis jerárquico de conglomerados da la posibilidad de elegir el número de soluciones final de grupos que se pueden formar; ese número varía desde cada observación. Su puede configurar desde un grupo hasta un solo conglomerado que incluya al total de los elementos.

Existen varias herramientas para decidir cuál es el número óptimo de clústeres; una de ellas es el dendograma, que es una representación gráfica en forma de árbol que resume el proceso de agrupación en un análisis de clústeres. Los objetos similares se conectan mediante enlaces cuya posición en el diagrama está determinada por el nivel de similitud/disimilitud entre los objetos. De este modo, se refleja el historial de conglomeración, que indica como cada individuo que forma un grupo independiente se va agrupando con los más cercanos hasta forman un solo grupo.

El software SPSS propone el dendograma como medio para determinar el número de clústeres en forma directa. Otra forma de hacerlo es mediante el cálculo de la tasa de variación entre los coeficientes conglomeración que se obtienen en las distintas etapas en las que se fusionan los grupos. Este método, propuesto por Hair, Anderson, Tatham y Black, sugiere que el momento de detener las fusiones es cuando la tasa de variación sea significativamente superior a la anterior.

Si se analiza el dendograma, se observa que se inicia con nueve conglomerados que se van fusionando, hasta que a una distancia de 25 se forma un solo grupo. En este punto, la literatura³ sugiere que haciendo un corte a una distancia de 13 unidades, quedan determinados dos grupos; sin embargo, también se puede apreciar que tres es

una solución posible, dado el importante salto que se observa después de la formación de tres conglomerados.

Aplicando la técnica de determinación de números conglomerados, de acuerdo al historial de conglomeración, se puede inferir que el número de grupos es dos, dado que el mayor salto en la tasa de variación de los coeficientes es entre la etapa 23 y 24, donde se forman dos clústeres.

Si bien en la primera etapa hay una variación importante en la tasa de variación, esto supondría que cada provincia o región formaría un clúster.

Etapa	Coefficientes	Tasa de variación	Grupos
1	13,8	170,7%	24
2	37,4	72,1%	23
3	64,4	58,7%	22
4	102,1	39,8%	21
5	142,8	29,5%	20
6	184,9	24,2%	19
7	229,6	24,0%	18
8	284,8	21,2%	17
9	345,3	20,5%	16
10	415,9	17,2%	15
11	487,6	15,0%	14
12	560,8	20,0%	13
13	673,0	17,9%	12
14	793,3	19,7%	11
15	949,7	19,2%	10
16	1132,1	23,6%	9
17	1399,6	19,3%	8
18	1670,4	29,1%	7
19	2156,0	25,6%	6
20	2708,7	27,2%	5
21	3444,3	23,0%	4
22	4235,1	44,5%	3
23	6121,0	81,6%	2
24	11115,6		1

Tabla 3. Historial de conglomeración

Si bien desde el punto de vista estadístico el número de conglomerados sería dos, es importante destacar que, para los fines analíticos del presente trabajo se consideraron nueve (los primeros grupos que muestra el dendograma) dadas las características sociales y económicas de la República Argentina, en la cual la Ciudad Autónoma de Buenos Aires tiene particularidades que la diferencian claramente del resto del país.

Junto con lo anterior, la formación de estos conglomerados (con mayor desagregación), permitirá comparar la estructura productiva de cada uno, medido como la contribución de los sectores económico en el Producto Bruto Geográfico provincial, con la participación de cada actividad en la demanda de crédito bancario.

³Ver por ejemplo [10].

3.5 Análisis por conglomerado

La Ciudad de Buenos Aires es el único integrante del primer conglomerado, por ser la sede del gobierno nacional y de las casas matrices de las principales empresas. Por tanto, gran parte del crédito comercial se concentra allí, aunque las actividades económicas no se realicen en ese distrito, tal como se mencionó anteriormente. El promedio de préstamos por habitante es treinta y tres mil pesos.

Concentra el 56 % del total de préstamos del sistema al primer trimestre de 2010. Es particularmente importante la representatividad que tiene en actividades tales como la minería (91 %), aunque haya que aclarar que allí es nula la actividad extractiva. Siete de cada diez pesos destinados a financiar la industria provienen también de este clúster.

De modo similar, un tercio del crédito bancario destinado al sector agropecuario surge de allí. Además, tienen gran relevancia los sectores de: electricidad, gas y agua, intermediación financiera y otros servicios financieros, administración pública, defensa y seguridad social.

Clúster	Provincia
1	Capital Federal
2	Catamar
	Formosa
3	Cordoba
	Santa Fe
4	Corrientes
	Chubut
	Juyuy
	Neuquen
	Santiago del Estero
5	Tierra del Fuego
	Chaco
	San Luis
6	Santa Cruz
	Entre Rios
7	La Pampa
	La Rioja
8	Mendoza
	Rio Negro
	Salta
	Tucuman
9	Interior Buenos Aires
	Misiones
	San Juan
	Conurbano Buenos Aires

Tabla 4. Historial de conglomeración

Los préstamos destinados a personas físicas en relación de dependencia laboral implican el 22 % de la cartera de créditos del conglomerado y el 37 % del total nacional en este rubro, con una población ligeramente superior al 7 % del país; esto obedece principalmente a la importante movilidad laboral entre la Ciudad Autónoma de Buenos Aires

y los veinticuatro municipios del Conurbano⁴. Por lo tanto a habitantes de la Provincia de Buenos Aires les son otorgados préstamos en entidades bancarias de la ex Capital Federal.

Además, el ingreso promedio de la Ciudad de Buenos Aires es significativamente mayor, por lo tanto los montos que se financian también son mayores. El segundo conglomerado lo forman las provincias de Catamarca y Formosa, que reciben el 0,4 % del total de préstamos del sistema bancario. El promedio por habitante es de setecientos cincuenta y dos pesos, el más bajo de los nueve clústeres. Si lo comparamos con el anterior, éste es cuarenta y cuatro veces menor.

Casi el 85 % del financiamiento se destina a personas físicas en relación de dependencia laboral, y sólo el 3,6 % a la actividad productiva (sector agropecuario e industrial). El comercio y los servicios reúnen uno de cada diez pesos y la construcción el 1,4 %. Estos distritos, en especial Formosa, son los de menores ingresos a nivel nacional, de acuerdo a la Encuesta Permanente de Hogares⁵. El financiamiento medio a este sector es de seiscientos treinta y seis pesos por habitante.

El tercer conglomerado está compuesto por las provincias de Córdoba y Santa Fe, en las cuales tiene un importante desarrollo la actividad agropecuaria e industrial. En conjunto, suman el 12 % del total de créditos, con un promedio de tres mil ciento veinte pesos por habitante, el segundo entre los nueve conglomerados.

El 41 % del crédito se destina a las principales actividades productivas de la provincia (26,3 % al sector agropecuario y 14,3 % a la industria); a nivel nacional, éstas dos provincias concentran algo más del 30 % del crédito al sector primario y el 11 % del manufacturero. El 28 % tiene como fin el comercio y los servicios; en particular, el primero representa uno de cada diez pesos.

Los préstamos a personas físicas en relación de dependencia laboral son casi el 28 % del conjunto de créditos del conglomerado, representando el 10 % a nivel nacional. El financiamiento medio a este sector por habitante es de ochocientos sesenta y cuatro pesos. De este grupo de provincias, se puede inferir que el crédito solicitado dentro de sus límites se destina en parte significativa al financiamiento de la producción de bienes.

En el cuarto conglomerado, se observa cierta heterogeneidad entre las características de las provincias, pero tienen una estructura crediticia similar. El 4,3 % de los créditos nacionales se destinan en esta región.

Dos tercios de los préstamos se canalizan a personas físicas en relación de dependencia laboral. El mayor valor se observa en la Juyuy con el 76 %; en segundo lugar se ubica Santiago del Estero con el 69 %. Existen indicios que existe una correlación negativa entre el ingreso de la población y la participación de este sector dentro del complejo.

⁴La Ciudad Autónoma de Buenos Aires y el Conurbano forman el Gran Buenos Aires.

⁵De acuerdo a datos del cuarto trimestre de 2010 conglomerados Gran Catamarca y Formosa.

La agricultura y la industria reciben, cada una, el 5,2 %, con un máximo del 12 % en Corrientes en el primer sector y el 10 % en Tierra del Fuego en el manufacturero. Las actividades relacionadas con la explotación de recursos naturales es casi el 1 % del total. Este porcentaje resulta considerablemente bajo, si tomamos en cuenta que, en cuatro de estas seis provincias, el sector minero (en especial, la extracción de hidrocarburos y gas) es un sector con importante participación en el Producto Bruto Geográfico (PBG). En las provincias de Chubut y Tierra del Fuego implican el 2,15 % y el 1,15 %, respectivamente.

La pesca es una actividad importante en las provincias mencionadas en el párrafo anterior; en ellas, representa el 3,6 % en Tierra del Fuego y 2 % en Chubut. Esto evidencia lo que se mencionó con anterioridad: que no siempre la localización del otorgamiento del crédito coincide en donde se realiza la actividad económica. Uno de cada cinco pesos se destina al comercio y los servicios.

La heterogeneidad mencionada anteriormente también hace referencia a los dispares niveles de ingresos que tienen los habitantes de las provincias que conforman este conglomerado; ello implica que la relación préstamos/personas alcance aquí sus valores extremos: Corrientes, con cuatrocientos noventa y tres pesos y Tierra del Fuego, cuatro mil doscientos pesos, una diferencia de ocho a uno.

El quinto estrato está formado por tres provincias que geográficamente están ubicadas al norte, centro y sur del país: Chaco, San Luis y Santa Cruz respectivamente. En conjunto, reúne el 1,8 % de la masa total crediticia del país.

El principal componente de similitud entre los préstamos es el otorgado a personas físicas en relación de dependencia laboral, con el 54 % de participación promedio ponderado. Existen importantes diferencias en el nivel de ingreso de la población de estas tres provincias, pero, en términos de estructura crediticia, estas disimilitudes no se manifiestan en forma significativa. Agrupan el 13 % de los créditos destinados al sector de la construcción, siendo la provincia patagónica el caso más relevante, pues allí uno de cada cuatro pesos de la cartera crediticia financia a este rubro. Pese a la importante actividad petrolera y minera en Santa Cruz, los créditos otorgados a este sector no alcanzan al 1 % del total provincial.

El financiamiento a la actividad agropecuaria tiene cierta relevancia en las provincias de Chaco y San Luis; en esta última provincia, el sector industrial sólo recibe aproximadamente el 4 % de los préstamos. En conjunto los sectores productores de bienes explican cerca del 7 % del volumen de créditos.

El crédito por habitante es de mil setecientos cincuenta y cinco pesos y novecientos cuarenta y seis para personas físicas en relación de dependencia laboral; es casi ocho veces menos al observado para la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Dentro de este clúster se observa que la diferencia del ingreso de la población incide en que los créditos a este sector en la provincia de Santa Cruz (dos mil cien pe-

sos per cápita) sean tres veces superiores a los registrados en Chaco y San Luis.

El sexto grupo lo forman Entre Ríos y La Pampa, en el cual ambas aportan el 2,2 % del stock de créditos para el período analizado. Los sectores productores de bienes demandan el 36,4 % del total de préstamos del conglomerado, siendo el agropecuario el más importante, con el 29 %; en el caso de La Pampa, este porcentaje asciende al 34 %. En conjunto estas provincias tienen un peso importante en el financiamiento al sector agropecuario, dado que reciben el 6,3 % de stock de créditos a nivel nacional

La industria tiene una baja incidencia en el promedio ponderado, se destaca este sector en la provincia de Entre Ríos con el 8,6 %, triplicando al registrado en el otro distrito. El resto de las actividades productoras de bienes (transables o no) tienen una participación marginal. Por último, el comercio y los servicios absorbieron menos de un quinto de los préstamos otorgados.

En Entre Ríos y La Pampa, coinciden la participación de los créditos destinados a las personas físicas en relación de dependencia laboral (39,7 %); pero al analizarlo por habitante, el de La Pampa duplica al observado en Entre Ríos (aproximadamente dos mil cien pesos y mil cuatrocientos pesos per cápita). De acuerdo a la EPH, el ingreso de los conglomerados pertenecientes a la provincia mesopotámica son alrededor de un 25 % inferior.

El séptimo conglomerado lo forma únicamente la provincia de La Rioja que, en ningún sector productivo tiene relevancia a nivel nacional. Representa apenas el 0,34 % del total de créditos nacionales. El principal destino de los préstamos es el financiar a personas físicas en relación de dependencia laboral (55 % del stock de créditos), con un promedio per cápita de novecientos cuarenta y siete pesos.

El segundo sector en importancia es el crédito destinado a la administración pública, defensa y seguridad social de la provincia, dado que concentra uno de cada cuatro pesos otorgados en préstamos dentro del territorio provincial. Agrupando los rubros de comercio y servicios, estos explican un tercio del crédito.

Las actividades productivas (de bienes transables) tienen una escasa participación en el financiamiento local: sólo el 9,3 %; de este, los dos tercios le corresponden a la industria manufacturera. La minería tiene una participación marginal.

El octavo conglomerado lo forman Mendoza, Río Negro, Salta, Tucumán e Interior de la provincia de Buenos Aires, siendo el segundo en importancia por la participación a nivel nacional, que alcanza al 13,7 %. Las personas físicas en relación de dependencia laboral demandan un quinto de los préstamos otorgados a nivel nacional; a su vez, este sector explica la mitad del financiamiento del clúster; con porcentajes que varían del 45 % en Mendoza a 56 % en Tucumán.

El promedio por habitante es de mil ochenta pesos, y no se aprecian diferencias de importancia entre las cinco pro-

vincias; los valores más bajos se encuentran en Mendoza, Río Negro y Salta con alrededor de novecientos diez pesos per cápita; en el Interior de Buenos Aires, el mayor con el algo más de mil doscientos pesos.

El crédito otorgado a los sectores primarios y secundarios productores de bienes alcanzan a uno de cada cuatro pesos otorgados; dos tercios de estos le corresponden al sector agropecuario. Vale aclarar que en el Interior de Buenos Aires se concentra una parte muy importante de la producción agrícola ganadera nacional. La participación mínima se ubica en Mendoza (6,5%), y la máxima en el Interior de Buenos Aires, con el 20%. La industria tiene mayor importancia en Mendoza, con el 14,9%, y en Río Negro el 5,3%. El comercio y los servicios reúnen el 20% del stock de créditos para el período analizado.

El noveno conglomerado se forma con las provincias de Misiones, San Juan y el Conurbano de Buenos Aires; desde aquí se demandan el 9% del volumen de préstamos otorgados. En términos per cápita, es la segunda región con menor nivel de préstamos (mil trescientos diecisiete pesos); esto puede obedecer, como se indicó anteriormente, a que habitantes y empresas del Conurbano Bonaerense tramiten las solicitudes crediticias en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

El 58% del financiamiento tiene como destinatario a personas físicas en relación de dependencia laboral. El promedio por habitante de este sector alcanzó setecientos setenta y tres pesos. Entre las actividades productores de bienes se destaca el financiamiento a la industria manufacturera, con el 14%. En conjunto agrupan al 18% del crédito otorgado. En la provincia de San Juan, tiene cierta relevancia el financiamiento a la actividad minera. Los sectores ligados a la agricultura son más importantes en Misiones y San Juan, (7,3% y 6,6% respectivamente).

El comercio y servicios concentran alrededor del 18%; de éste porcentaje, un tercio le corresponde al comercio al por mayor y al por menor.

3.6 Análisis de ANOVA

Mediante un seudoanálisis de la varianza como lo denomina Uriel,⁶ se puede establecer si los valores medios que toman las variables en cada uno de los grupos son diferentes o no. A partir de los datos (ver tabla 7 en anexo) se puede observar que existen diferencias en las medias de cada variable por conglomerado especialmente en las que tienen mayor representatividad, como son los préstamos destinados a personas físicas, sector manufacturero, agricultura y ganadería.

En cambio, aquellos sectores que tienen una participación marginal en el stock de créditos, como son la pesca y sus actividades conexas, hotelería y restaurantes, no muestran evidencias de diferencias significativas entre los nueve grupos seleccionados.

⁶Ver [10], página 63.

Esto daría indicios de que los sectores con baja representatividad se podrían fusionar con otros con los que tuvieran alguna afinidad, como son las actividades económicas que, en conjunto, forman el sector servicios.

4 Conclusiones

El principal tipo de préstamos en el país, en los últimos años, es el de préstamos personales (33% en el 2010). Pero este dato es para tomar con pinzas, es posible que muchos préstamos destinados a empresas hayan sido emitidos a nombre de sus titulares.

El principal sector al que se destinaron los préstamos en la mayor parte de los años de la década pasada (hasta el año 2007) fue al sector servicios.

Hay considerable diferencia entre las distintas provincias en los sectores a los que se dirigen sus préstamos. Esto no debe sorprendernos, si se considera que los préstamos se relacionan mucho con la estructura productiva de cada provincia. Así, la Ciudad de Buenos Aires destina gran parte de sus préstamos a la industria manufacturera, mientras que una provincia como La Pampa, a su producción primaria.

Con referencia al análisis de clúster, esto fue un abordaje exploratorio para empezar estudiar algún patrón de comportamiento en la estructura crediticia de las provincias.

Se puede observar claramente un fenómeno que podemos denominar la falta de "Federalismo Financiero", esto es, la elevada concentración del crédito en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, puede ser un factor que altere la posibilidad de aplicar políticas públicas de desarrollo a la actividad productiva. El elevado porcentaje de créditos otorgados a personas físicas explica que gran parte del crédito bancario tenga como destino el fomento al consumo, en perjuicio de la actividad productiva. Además, esto puede explicarse por el escaso desarrollo de la banca privada en el interior del país, especialmente en las provincias que no tienen altos niveles de desarrollo o escasa población. La excepción a esta afirmación se da en algunas provincias con economías regionales desarrolladas, como lo pueden ser Córdoba y Santa Fe, en las cuales se observa claramente como se canaliza el crédito de las entidades locales.

Referencias

- [1] Anastasi Alejandra, Bebczuk Ricardo, Elosegui Pedro y Sangiacomo Máximo, *Diversificación geográfica, productiva y por deudores y su efecto sobre la calidad de la cartera crediticia en Argentina*, Banco Central de la República Argentina, Documento de trabajo N° 36, (2008).

- [2] Debraj Ray, *Economía del Desarrollo*, Antoni Bosch Editor, Barcelona, (2002).
- [3] Gutiérrez Cabello Adrián y Salama Andrés, *Las Pymes Industriales del Partido de General San Martín: Relaciones entre Empleo, Inversión y Exportación* presentado en el 5to Congreso Internacional sobre las Micro, Pequeñas y Medianas Empresas del Siglo XXI llevado a cabo en Málaga, España (Enero 2010)
- [4] Gutiérrez Cabello, Adrián y Salama Andrés, *Relación entre la estructura productiva de una región y la evolución de sus variables monetarias: una aplicación del análisis multivariado a la provincia de Buenos Aires* en *Panorama Económico y Financiero* N° 64, páginas 53 – 66, Septiembre 2010; Universidad Nacional de San Martín.
- [5] Gutiérrez Cabello Adrián y Salama Andrés, *Análisis regional de la estructura productiva de la Provincia de Buenos Aires y su impacto sobre las variables monetarias* presentado en la Primera Reunión Anual de la Sociedad Argentina de Economía Regional llevada a cabo en la Universidad de San Martín en noviembre de 2010.
- [6] Lliteras Miguel y Salloum Damián, *El mecanismo de transmisión monetaria en la Argentina bajo racionamiento de crédito*, Universidad Nacional del Sur, (2002).
- [7] Ministerio de Economía y Finanzas Públicas de la República Argentina, *Distribución regional y sectorial del crédito bancario en la post convertibilidad*, Nota técnica N° 28, (2010).
- [8] Pérez Cesar, *Econometría avanzada. Técnicas y herramientas*, Pearson, (2008).
- [9] Sala i Martín Xavier, *Apuntes de crecimiento económico*, Antoni Bosch Editor, (2002).
- [10] Uriel Ezequiel y Aldás Joaquín, *Análisis Multivariante Aplicado*, Thomson, (2005).
- [11] Proyecto Ceades, *Contenedor Hipermedia de Estadísticas Aplicadas a la Economía y Ciencias Sociales*, Universidad de Valencia, 2007.

Conglomerado	Datos	No identificada	Personas físicas en relación de dependencia laboral	Agricultura, ganadería, caza y silvicultura	Pesca, explotación de criaderos de peces	Explotación de minas y canteras	Industria manufacturera	Electricidad, gas y agua	Construcción	Comercio al por mayor y al por menor
1	Media Desv. típ.	4,482 .	22,053 .	6,590 .	0,053 .	3,176 .	19,102 .	2,243 .	2,218 .	5,044 .
2	Media Desv. típ.	0,352 0,261	84,524 1,087	2,217 1,466	0,000 0,000	0,236 0,118	1,357 0,863	0,005 0,007	1,428 0,194	3,490 1,647
3	Media Desv. típ.	0,687 0,235	27,742 1,285	26,458 4,861	0,004 0,001	0,302 0,176	14,178 2,561	1,062 0,166	1,487 0,441	9,924 1,468
4	Media Desv. típ.	0,582 0,408	4,344 54,854	3,785 4,269	0,938 1,518	0,655 0,835	5,125 2,954	0,780 0,470	3,283 2,744	5,418 1,872
5	Media Desv. típ.	0,213 0,196	3,221 39,683	2,774 30,295	0,003 0,003	0,272 0,481	2,699 5,723	0,073 0,262	16,812 2,194	5,679 9,003
6	Media Desv. típ.	0,116 0,136	0,018 54,549	4,741 2,893	0,004 0,000	0,313 0,005	4,039 6,421	0,171 0,705	0,535 0,781	0,839 1,790
7	Media Desv. típ.	1,925 0,600	50,912 4,178	12,750 5,033	0,126 0,276	0,566 0,512	8,978 3,752	0,434 0,456	3,907 3,236	6,530 1,968
8	Media Desv. típ.	1,955 2,420	58,125 1,199	5,659 2,273	0,022 0,028	1,457 2,080	14,226 3,717	0,462 0,372	1,741 1,671	5,906 0,388

Tabla 5. Participación de los créditos por sector, promedio simple (Elaboración propia). cont.

Conglomerado	Hotelería y restaurantes	Transportes, almacenamiento y comunicaciones	Intermediación financiera y otros servicios financieros	Inmobiliarios, empresariales y de alquiler	Administración pública, defensa y seguridad social	Enseñanza, servicios sociales y de salud	Otros
1	0,153	2,220	6,229	1,607	18,401	0,609	5,821
2	0,015	0,402	3,213	0,143	0,071	0,356	2,191
	0,021	0,500	4,442	0,076	0,073	0,080	0,223
3	0,190	1,133	1,065	2,269	2,971	0,742	9,786
	0,193	0,309	0,851	1,126	0,126	0,173	4,898
4	0,296	0,959	1,236	1,362	0,955	0,582	4,395
	0,322	0,558	2,017	0,696	0,944	0,189	1,468
5	0,187	1,142	0,723	1,049	6,130	0,361	5,338
	0,215	0,564	1,057	0,739	3,322	0,321	2,268
6	0,017	0,458	2,217	1,188	3,927	0,248	4,101
	0,009	0,457	3,131	0,250	2,250	0,010	0,305
7	0,001	0,023	3,472	0,152	26,839	0,044	2,189

8	0,230	0,942	0,459	2,274	3,414	0,678	5,873
	0,275	0,462	0,159	0,678	3,444	0,469	2,168
9	0,048	1,092	0,903	1,630	0,675	0,898	5,202
	0,042	0,589	1,196	1,311	0,350	0,822	1,110

Tabla 6. Participación de los créditos por sector, promedio simple (Elaboración propia).

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
No identificada	Inter-grupos	23,753	8	2,969	3,151	0,024
	Intra-grupos	15,075	16	0,942		
	Total	38,828	24			
Personas físicas en relación de dependencia laboral	Inter-grupos	5885,699	8	735,712	61,754	0,000
	Intra-grupos	190,617	16	11,914		
	Total	6076,316	24			
Agricultura, ganadería, caza y silvicultura	Inter-grupos	1860,885	8	232,611	15,072	0,000
	Intra-grupos	246,938	16	15,434		
	Total	2107,823	24			
Pesca, explotación de criaderos de peces	Inter-grupos	3,724	8	0,465	0,630	0,742
	Intra-grupos	11,830	16	0,739		
	Total	15,553	24			
Explotación de minas y canteras	Inter-grupos	9,825	8	1,228	1,440	0,254
	Intra-grupos	13,643	16	0,853		
	Total	23,468	24			
Industria manufacturera	Inter-grupos	554,418	8	69,302	7,212	0,000
	Intra-grupos	153,759	16	9,610		
	Total	708,178	24			
Electricidad, gas y agua	Inter-grupos	5,258	8	0,657	4,623	0,004
	Intra-grupos	2,275	16	0,142		
	Total	7,533	24			
Construcción	Inter-grupos	554,158	8	69,270	5,595	0,002
	Intra-grupos	198,089	16	12,381		
	Total	752,246	24			
Comercio al por mayor y al por menor	Inter-grupos	83,758	8	10,470	2,087	0,100
	Intra-grupos	80,272	16	5,017		
	Total	164,030	24			
Hotelería y restaurantes	Inter-grupos	0,282	8	0,035	0,592	0,771
	Intra-grupos	0,953	16	0,060		
	Total	1,236	24			
Transportes, almacenamiento y comunicaciones	Inter-grupos	3,790	8	0,474	1,764	0,159
	Intra-grupos	4,296	16	0,269		
	Total	8,086	24			
Intermediación financiera y otros servicios financieros	Inter-grupos	42,241	8	5,280	1,514	0,228
	Intra-grupos	55,798	16	3,487		
	Total	98,039	24			
Inmobiliarios, empresariales y de alquiler	Inter-grupos	10,626	8	1,328	2,099	0,098
	Intra-grupos	10,123	16	0,633		
	Total	20,748	24			
Administración pública, defensa y seguridad social	Inter-grupos	865,899	8	108,237	21,836	0,000
	Intra-grupos	79,309	16	4,957		
	Total	945,208	24			
Enseñanza, servicios sociales y de salud	Inter-grupos	1,1466	8	0,143	0,865	0,564
	Intra-grupos	2,651	16	0,166		
	Total	3,797	24			
Otros	Inter-grupos	78,000	8	9,750	2,347	0,070
	Intra-grupos	66,462	16	4,154		
	Total	144,462	24			

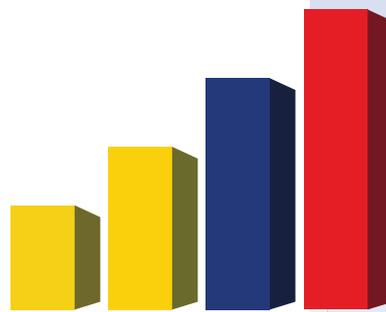
Tabla 7. Análisis de la ANOVA (Elaboración propia).

Analítica

Estructura ocupacional y bono demográfico en el Ecuador

Demographic and occupational structure in Ecuador

Yannira Chávez y Paúl Medina



www.inec.gob.ec | www.ecuadorencifras.com

Estructura ocupacional y bono demográfico en el Ecuador

Demographic and occupational structure in Ecuador

Yannira Chávez[†] y Paúl Medina[‡]

[†]Dirección de Estudios Analíticos Estadísticos, Instituto Nacional de Estadística y Censos, Quito, Ecuador

[‡]Universidad Estatal de Milagro, Milagro, Ecuador

[‡]Instituto Gregorio Millán, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España

[†]yannira_chavez@inec.gob.ec, yaniris.mericita@gmail.com, [‡]pmedinavz@gmail.com

Recibido: 2 de febrero de 2012

Aceptado: 15 de abril de 2012

Resumen

Entre los años 1990 y 2012 Ecuador ha experimentado cambios demográficos y socio-económicos profundos, que han afectado al mercado laboral, es decir, a su Población en Edad de Trabajar (PET) y a su Población Económicamente Activa e Inactiva (PEA, PEI respectivamente). Por tal motivo, este documento investiga el efecto que las tendencias demográficas y las condiciones laborales han tenido sobre estos parámetros. Para estos fines, se utilizan datos de las *Estadísticas Vitales* desde el año 1990 hasta el año 2010; la Encuesta Nacional de Empleo, Desempleo y Subempleo (ENEMDU) en el mismo período; y los *Censos de Población y Vivienda de 1990, 2001 y 2010*. Se analiza de qué manera los cambios demográficos de los grupos en edad productiva afectan a la estructura ocupacional.

Palabras clave: mercado laboral, población económicamente activa, población económicamente inactiva, población en edad de trabajar, cambios demográficos.

Abstract

From 1990 to 2012, Ecuador has experienced profound demographic and socio-economic changes that have affected the labor market, that is, the Working-Age Population (WAP), Economically Active Population (EAP) and Economically Inactive Population (EIP). This paper researches the effect that demographic trends and working conditions have on these parameters, using data from the Vital Statistics 1990-2010, Labor Force National Surveys 1990-2010 (Employment, Unemployment and Underemployment ENEMDU) and Population and Housing Census (1990, 2001 and 2010). It analyzes how demographic changes in working-age population affect the occupational structure.

Keywords: labor market, economically active population, economically inactive population, working-age population, demographic changes.

Código JEL: J00, J11, J24. **MSC2000:** 00A72, 11K45.

1 Introducción

Durante la década pasada Ecuador experimentó cambios en el comportamiento de los patrones demográficos en los cuales, la natalidad, mortalidad y fecundidad juegan un papel preponderante. Por ejemplo, en 1990 la tasa de mortalidad era de 5 por mil habitantes; veinte años más tarde, disminuyó a 4 por mil habitantes [8]. Actualmente, la esperanza de vida al nacer de una persona supera los 75

años, mientras que en 1990 era de 69 años, según UNICEF [9]. Por otra parte, la tasa de natalidad pasó de un 3% a un 1,5% y, la tasa de fecundidad, del 11% al 5,17%, en el mismo período [8].

Al realizar una estimación de los volúmenes de población –para conocer la futura demanda de servicios de educación, de salud, de vivienda, o de puestos de trabajo, entre

otras-, resulta especialmente relevante estimar las formas en que la población se incorpora a un modelo económico en el cual la acción del Estado, como agente productivo, se reduce cada vez más y el mercado se convierte en el mecanismo regulador de la actividad económica [17]. Entonces, los cambios demográficos en la población ecuatoriana afectan de forma directa el crecimiento económico; en particular, la producción de bienes y servicios pues, al cambiar el crecimiento poblacional por estructura etaria, esas modificaciones son capaces de producir modificaciones significativas en la estructura ocupacional, absorción productiva y movilidad estructural.

La evolución de la estructura por edad, -en otras palabras la dinámica poblacional- permite explicar cambios en el mercado laboral en el mediano y largo plazo. En Ecuador, al presentarse una disminución de la natalidad y aumento de la esperanza de vida (como se detalla en la figura 4), existe una menor proporción de la población económicamente dependiente (menores de 15 años y mayores de 65 años), mientras que la población en edad de trabajar (15 a 64 años de edad) alcanza su máximo histórico. Al existir estas combinaciones demográficas según Welti [17] se constituye el denominado bono demográfico; éste, según Flores [6] brinda al país la oportunidad irreplicable de invertir en capital humano, para enfrentar los retos del desarrollo y hacer frente al envejecimiento demográfico.

Por lo expuesto, el objetivo del artículo es mostrar las características del crecimiento y la estructura demográfica en el Ecuador, con sus implicaciones para el mercado laboral. Así, la dinámica poblacional que se ha presentado en las últimas dos décadas, ha mostrado relevantes transformaciones en su estructura por edad. En términos generales, Ecuador se encuentra en la fase tres de la transición demográfica [2, 3], conocida como el final de la transición, que se caracteriza por un proceso en el cual la tasa de natalidad inicia un proceso de descenso.

El artículo se estructura como sigue: en la sección 2 se exponen aspectos teóricos necesarios para el planteamiento del problema. En la sección 3 se presentan los principales resultados del estudio. En la sección 4 se señalan las conclusiones más relevantes y, al final, en la sección 5 se presentan las recomendaciones.

2 Aspectos Teóricos

Dado que la demografía aporta conocimientos para la solución de problemas sociales y discute su importancia para la aplicación de políticas sociales y económicas [7], en esta sección se presentan algunas definiciones demográficas utilizadas a lo largo del estudio.

DEFINICIÓN 1 (Transición Demográfica, TD). *Es un esquema analítico a través del cual se describen las etapas por las cuales una sociedad pasa de un régimen demográfico "tradicional" a uno "moderno" [17].*

OBSERVACIÓN 1. *La diferencia entre una sociedad y otra se determina por la existencia de condiciones institucionales, transformaciones culturales, y desarrollos tecnológicos que permiten una disminución de la mortalidad y fecundidad.*

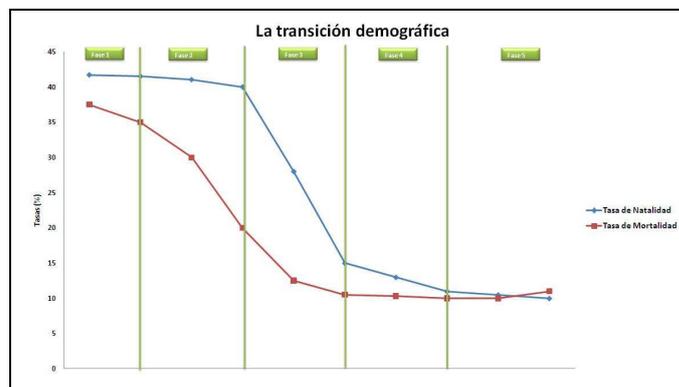


Figura 1. Fases de la Transición Demográfica. Fase 1: Antiguo régimen demográfico; Fase 2: Comienzo de la transición; Fase 3: Final de la transición; Fase 4: Régimen demográfico moderno; Fase 5: Crecimiento cero. Fuente: Fecundidad en el Ecuador [9].

DEFINICIÓN 2 (Tasa de crecimiento natural, TCN). *Es la diferencia entre la tasa de natalidad (TN) y la tasa de mortalidad (TM) que ocurre en un determinado lugar. Algebraicamente se puede representar la relación como*

$$TCN = TN - TM. \quad (1)$$

OBSERVACIÓN 2. *La diferencia será positiva en el caso que exista mayor número de nacimientos que de muertes y negativa en el caso contrario.*

OBSERVACIÓN 3. *La tasa de crecimiento natural se considera alta si supera el 2%, moderada si se encuentra entre el 1% y el 2%, y baja si es inferior al 1% [12].*

DEFINICIÓN 3 (Relación de dependencia poblacional, RD). *Se define como la razón entre la población dependiente -es decir, población mayor a 65 años (P_{65}) más la población menor a 15 años (P_{15})- y la población en edad de trabajar; esta última se encuentra entre los 15 y 64 años (PET) [9]. Algebraicamente se puede representar la relación como*

$$RD = \frac{P_{65} + P_{15}}{PET}. \quad (2)$$

De la ecuación (2), se derivan tres casos.

i) Si $RD < 1$, se tiene que

$$P_{65} + P_{15} < PET. \quad (3)$$

ii) Si $RD = 1$, se tiene que

$$P_{65} + P_{15} = PET. \quad (4)$$

iii) Si $RD > 1$, se tiene que

$$P_{65} + P_{15} > PET. \quad (5)$$

DEFINICIÓN 4 (Bono demográfico, BD). *El bono demográfico, en una sociedad, se presenta cuando la relación de dependencia poblacional (RD) es menor a 1. En otras palabras se debe cumplir la desigualdad (3).*

OBSERVACIÓN 4. *Cuando la población dependiente ($P_{65} + P_{15}$) es igual a la población en edad de trabajar (PET), existe un punto de corte, que indicaría el inicio o fin del bono demográfico.*

OBSERVACIÓN 5. *Cuando la población dependiente ($P_{65} + P_{15}$) es mayor que la población en edad de trabajar (PET), no existe la posibilidad de bono demográfico.*

Dentro de la dinámica de poblaciones existen varios modelos para representar y estudiar el comportamiento poblacional [1, 5].

Los precursores de los estudios de la dinámica de poblaciones aplicando modelos matemáticos se remontan a Malthus [11] y Verhulst [13] quines vivieron en el siglo XVIII y XIX respectivamente y a Lotka [10] y Volterra [15] los trabajos de estos últimos se publicaron en los años 20 y 30 del siglo pasado. Más recientemente se han desarrollado varios/nuevos modelos para representar y estudiar el comportamiento poblacional [1, 5]. Sin embargo, el modelo representado por la ecuación logística de población [13, 16] es uno de los más aceptados y utilizados para realizar aproximaciones del tamaño poblacional. Por tal motivo, en el presente estudio se utiliza dicho modelo.

DEFINICIÓN 5 (Ecuación Logística de la Población). *Si P representa el tamaño de la población y t representa el tiempo, la ecuación logística de la población, queda formalizada por la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \quad (6)$$

donde a corresponde a la tasa de natalidad y b a la tasa de mortalidad.

OBSERVACIÓN 6. *Si se cumple la relación $b \ll a$, de tal modo que si P no es demasiado grande, entonces el término $-bP^2$ es insignificante comparado con aP , de donde se deduce que la población crece exponencialmente [16].*

OBSERVACIÓN 7. *Al utilizar la ecuación (6) para predecir el crecimiento futuro de una población aislada, si P_0 es la población en el tiempo t_0 , entonces $P(t)$ la población en el tiempo t , cumplirá que*

$$P(t_0) = P_0. \quad (7)$$

A la igualdad (7) se la conoce como condición inicial para la ecuación (6).

OBSERVACIÓN 8. *La ecuación (6) junto con la condición inicial (7), definen un problema de valor inicial, cuya solución es [9]*

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at_0}}. \quad (8)$$

Tras revisar los conceptos que pueden ayudar a entender los cambios poblacionales e implicaciones sociales, se hace necesario observar la evolución poblacional por estructura de edad. Para ello, se necesita obtener una proyección de las tasas de natalidad y mortalidad ya que los cambios, concretamente, resultan de una disminución de la natalidad y un aumento en la esperanza de vida.

Por un lado, para la proyección de la tasa de natalidad, se hace uso de la Simulación de Monte Carlo, pues es aplicable a problemas estocásticos o determinísticos, a partir de analizar distribuciones de variables aleatorias usando simulación de números aleatorios. Por otro lado, para la tasa de mortalidad no se realiza una proyección, sino que se toma el último dato real como la mejor aproximación, pues en los últimos 17 años la tasa de mortalidad se ha mantenido en el rango de 0,0047 a 0,0042.

2.1 Construcción del Bono Demográfico

En primer lugar, se hace uso de la ecuación (8) para obtener las proyecciones de la población hasta el año 2055, con la que se obtiene el número global de la población. En segundo lugar, para la obtención de las proyecciones por estructura de edad es necesario realizar una estimación de la población por rango de edades, es decir, de 0 a 14 años, de 15 a 64 años y de 65 en adelante. Para ello, se realiza una distribución de la población por rangos de edades, y se proyecta a través de la estimación de la tasa de natalidad, realizada mediante una Simulación Monte Carlo, y el valor de la tasa de mortalidad del año 2010. Por último, se determina la relación de dependencia poblacional, RD, establecida en la ecuación 2.

El procedimiento que seguimos para obtener una proyección por rango de edad básicamente se basa en dos fases, las cuales se explican a continuación:

Fase 1 Aquí se detallan los pasos para alcanzar la proyección de la población total, anualmente.

- Obtener datos históricos del período 1990 - 2010 sobre el valor de la población total y las tasas de natalidad y mortalidad.
- Tomar de referencia los datos correspondientes al año de 1990, esto es, $P_0 = 9\,648\,189$, $a = 32$ por mil habitantes, $b = 5$ por mil habitantes. Se proyecta la población total anualmente, a través de la ecuación (8), hasta el año 2000.
- Actualizar los parámetros (P_0, a, b), considerando los datos arrojados por el censo de población y vivienda del año 2001. Se proyecta la población total anualmente hasta el año 2009.

- (d) Actualizar nuevamente los parámetros (P_0, a, b) para el año 2011, considerando los datos arrojados por el censo de población y vivienda del 2010. Se proyecta la población total anualmente hasta el año 2055, y
- (e) Mostrar que las proyecciones son consistentes con el cálculo del error relativo; con ello, se verifica la calidad de las estimaciones; éste es de 0,05 y 0,02 para el año 2001 y 2010 respectivamente.

Fase 2 En esta fase se detalla el procedimiento para obtener la proyección de la población por rango de edades, anualmente.

- (a) A partir de la distribución por edad del año 1990, se realiza la proyección por edades para los años 1995 y 2000. Esto se basa en el valor de la población total obtenido en la Fase 1 y en los nacimientos y muertes.
- (b) Se actualiza la distribución por edades en los años 2001 y 2010, con los datos que proporcionan los respectivos censos de población y vivienda.
- (c) Se hace necesario conocer el número de nacimientos que hubo y habrá desde el año 2010 hasta 2055. Para ello, se estima tal cifra de nacimientos mediante una Simulación Monte Carlo.
- (d) Al conocer el número de nacimientos por período y la proporción de muertes por rango de edad, es posible estimar el número de personas por cada rango, a través de un proceso iterativo.

3 Resultados

En esta sección, se presenta los principales resultados, que nos permiten conocer los cambios demográficos del Ecuador, así como su relación con el mercado laboral.

3.1 Transición Demográfica

La evolución de la tasa de natalidad y mortalidad en el Ecuador (ver figura 2) ha presentado cambios que afectan a la estructura poblacional. Se puede observar un descenso importante de la tasa de natalidad, desde el año 1990 hasta el año 2010. Esto podría explicarse por las transformaciones sociales: el acceso a medidas anticonceptivas, la priorización de los estudios por parte de ésta, y el aumento en la edad media para contraer matrimonio. Por otro lado, en la tasa de mortalidad se puede observar un descenso muy suave, incluso se podría manifestar que no ha variado gran medida, un factor determinante para ello sería el

aumento de la esperanza de vida o supervivencia de los individuos, al disminuir las muertes por enfermedades infecciosas, principalmente.

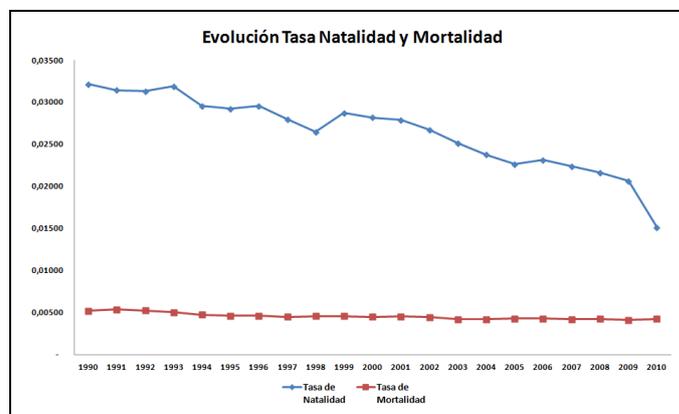


Figura 2. Evolución de la tasa de natalidad y mortalidad en el Ecuador. Fuente: elaboración propia a partir de la encuesta de nacimientos y defunciones.

De acuerdo con la teoría de la transición demográfica de Warren [2, 3], el Ecuador se encontraría en la **tercera etapa**; está se caracteriza por un importante descenso de la tasa de natalidad (TN) y una tasa de mortalidad mantenida en el tiempo (TM) (ver figura 1). La combinación de bajas tasas de natalidad y mortalidad dan como resultado una tasa de crecimiento natural de alrededor del dos por ciento anual (ver figura 3), la cual, de mantenerse, implicaría que la población del país se duplicará en poco más de 35 años.

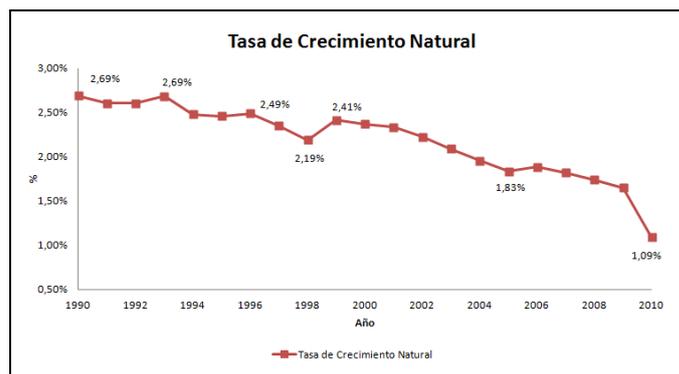


Figura 3. Tasa de crecimiento Natural en el Ecuador. Fuente: elaboración propia a partir de la encuesta de nacimientos y defunciones.

3.2 Bono demográfico

En el caso de sociedades con una elevada tasa de crecimiento natural, como era el caso de Ecuador en la década de los 90 el descenso de la fecundidad es responsable de la modificación de la distribución por edad. Como resultado de esta transición demográfica, la estructura etaria de la

población ecuatoriana ha cambiado sustancialmente, como se puede evidenciar en la figura 4; ello corresponde al bono demográfico.

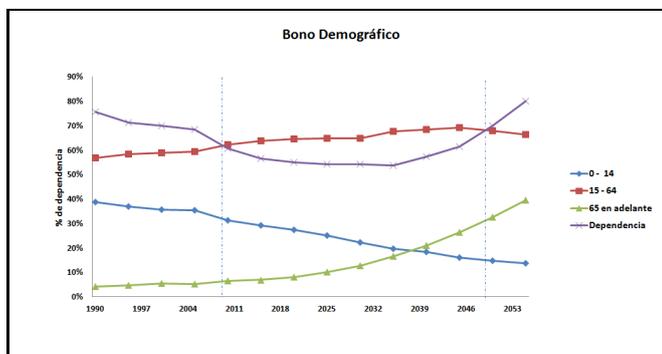


Figura 4. Bono demográfico en el Ecuador. Fuente: elaboración propia.

Se puede observar en la figura 4, relevantes transformaciones en la estructura por edad. Dos de ellas son: la disminución de la proporción del grupo de niños (0-14 años) y el acelerado crecimiento de la población en edad de trabajar (15-64 años); ambos han formado el llamado bono demográfico que, de acuerdo a los resultados encontrados para el Ecuador, rige desde el año 2009 hasta 2049.

Al existir una relación favorable entre población productiva (los adultos) y población no productiva (los niños y ancianos), significaría la disminución de la carga económica por productor y por tanto, la posibilidad de una mejor distribución de los bienes económicos [4].

3.3 Migración de la PEA y la PEI en los últimos 5 años

El aumento del bono demográfico y de la población en edad de trabajar no se traducen directamente en un aumento del número de personas que ingresan en el mercado laboral o que se encuentren como Población Económicamente Activa. En los últimos cinco años un gran porcentaje de la población comprendida entre los 15 a 25 años de edad se ha orientado a estudiar, evidenciado por los datos de ingreso en los tres niveles educativos (básica, bachillerato y superior). De esta forma, en las figuras 5, 6 y 7 se puede observar que en los últimos 5 años la evolución de la Población Económicamente Inactiva es creciente, para los tres niveles educativos (Básica, Bachillerato, Superior). Ello evidencia que un gran porcentaje de la población comprendida entre los 15 a 25 años de edad se ha orientado a estudiar; es decir, que ha migrado del mercado laboral, siendo ésta una razón por la que la Población Económicamente Activa no aumenta en la misma proporción que las personas en edad de trabajar.

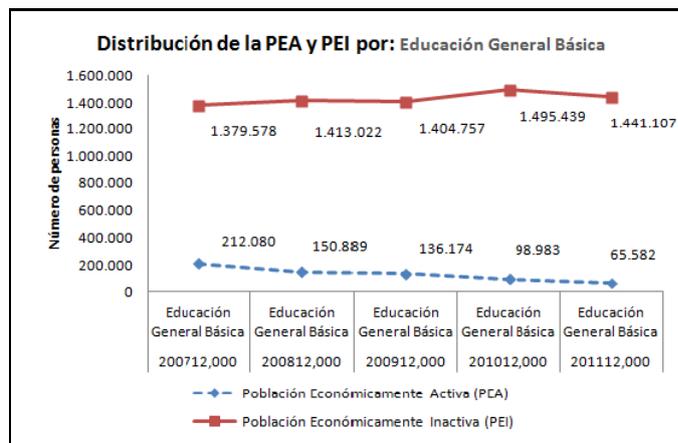


Figura 5. Educación General Básica de 5 a 14 años de edad. Fuente: elaboración propia a partir de la ENEMDU.

En la figura 5 se puede observar que la PEA presenta una tendencia a la baja; ello significa que existe una menor participación de niños (5 a 14 años de edad) que realizan trabajos remunerativos. Del mismo modo, la línea continua (PEI) es superior a la línea discontinua (PEA), indicando que el mayor porcentaje de individuos con Educación General Básica se ubica dentro de la PEI.

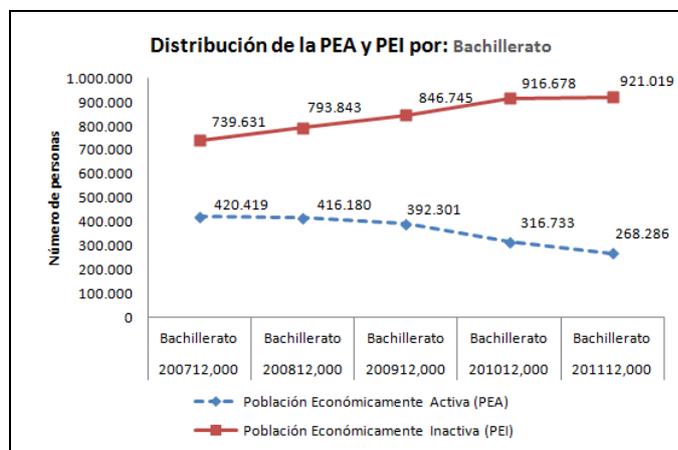


Figura 6. Bachillerato de 15 a 18 años de edad. Fuente: elaboración propia a partir de la ENEMDU.

En la figura 6 se puede observar que la PEA presenta una tendencia a la baja, lo que significa que existe una menor participación de jóvenes entre 15 y 18 años de edad en trabajos remunerativos. De modo similar, la línea continua (PEI) es superior a la línea discontinua (PEA), indicando que el mayor porcentaje de individuos con Bachillerato se ubican en la PEI.

En la figura 7 se puede observar que la PEA presenta una tendencia a la baja, lo que significa que existe una menor participación de jóvenes entre 19 y 25 años de edad en trabajos remunerativos. De modo similar, la línea discontinua (PEA) es superior a la línea continua (PEI), indicando

que el mayor porcentaje de individuos con Educación Superior se ubican en la PEA.

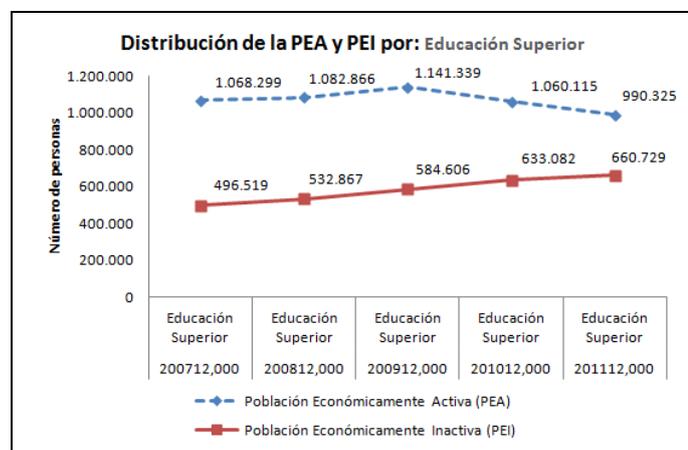


Figura 7. Superior de 19 a 25 años de edad. Fuente: elaboración propia a partir de la ENEMDU.

4 Conclusiones

- El cambio en la estructura por edad, presentará beneficios tangibles al generar una ventana de oportunidad o bono demográfico, debido a una relación cada vez más favorable entre la menor población en edad dependiente y la mayor población en edad productiva.
- Al existir una reducción en el número de nacimientos, a nivel agregado tiene un efecto positivo en el corto y mediano plazo; ello se debe a que, al cambiar la relación de dependencia, se requerirá gastar menos para cubrir las necesidades de la población dependiente.
- El aumento de personas entre 15 y 25 años que estudian, en los diferentes niveles educativos, es un factor que, en el momento actual, hace que la Población Económicamente Activa no aumente en la misma proporción que la Población en Edad de Trabajar.

5 Recomendaciones

- Como el bono demográfico permanecerá vigente en las cuatro próximas décadas, se deberá estimular un círculo virtuoso entre empleo, ahorro e inversión, para mejorar la productividad del país.
- En el Ecuador, el aumento absoluto y relativo de la población en edad de trabajar continuará durante las próximas cuatro décadas. Será necesario ampliar la

planta productiva para contribuir al desarrollo y solventar la fuerte demanda de empleo. Al mismo tiempo se necesitarán establecer medidas fiscales y políticas sociales para el creciente grupo de la población mayor de 65 años de edad.

- Es necesario considerar la dinámica poblacional, la distribución por edades y sexo de la población, junto con el sistema económico, para llevar a cabo la planeación económica, social y demográfica del país.

Referencias

- [1] F. Brauer and C. Castillo, (2000), "Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology", Springer-Verlag, pp. 1-48.
- [2] H. Cabeza, (2008), "Teoría de la Transición Demográfica", Perú, pp. 1-20.
- [3] L. Campos, (1999), "La transición demográfica en el primer tercio del siglo XX", Universidad de Málaga, pp. 1-96.
- [4] Y. Chávez y P. Medina, (2012), "Determinantes de la Temporalidad en el Mercado laboral ecuatoriano", Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, ISSN: 1886-516X. D.L: SEP-2927-06, pp.24-53.
- [5] H. Freedman, (1980), "Deterministic Mathematical Models in Population Ecology", Marcel Dekker, Universidad de California, ISBN: 0824766539, pp. 1-76.
- [6] M. Flores, (2008), "Bono Demográfico en Honduras", Córdoba, Argentina, pp.1-18.
- [7] M.Gandásegui, (2003), "Papeles de población", Universidad Autónoma del Estado de México, Centro de Investigación y Estudios Avanzados de la Población, N0. 36, ISSN 1405-7425, pp. 10-19.
- [8] Instituto Nacional de Estadísticas y Censos del Ecuador, (2007-2010) "Estadísticas de Empleo, Mercado Laboral, Estadísticas Vitales, Censos". Disponible en: www.ecuadorencifras.com/cifras--inec/bancInf.html.
- [9] C. Lanchinba y P. Medina, (2011), "Fecundidad en el Ecuador y su relación con el entorno social y evolutivo", Revista Analitika, Volumen 1, ISSN 13906208, pp. 27-51.
- [10] A. J. Lotka, (1920), "Analytical Note on Certain Rhythmic in Organic Systems", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 6, pp. 410-415.
- [11] T. Malthus, (1798), "An Essay on the Principle of Population", Minerva Ediciones, Madrid, pp. 1-23.

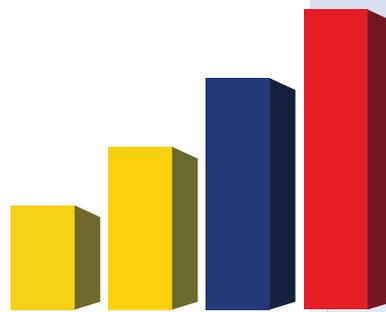
- [12] I. Romero, (2009), "Geografía de la población", disponible en olmo.pntic.mec.es/trog0003/index_archivos/geografia/demografia.htm.
- [13] P. Verhulst, (1838), "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement", *Correspondance mathématique et physique*, 10, pp. 113-121.
- [14] S. Vera, (2008), "Estructura ocupacional y bono demográfico", *Economía Actual*, México, pp.1-3.
- [15] V. Volterra, (1926), "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", *Mem. Acad. Lincei Roma*, 2, pp. 31-113.
- [16] D. Zill, (1997), "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado", Primera edición, International Thomson Editores, México, pp. 36-70.
- [17] C. Welti, (1999), "Los procesos demográficos en México en la época del neoliberalismo", *Centre d'Estudis Demogràfics*, pp. 1-21.

Analítica

Normas para la presentación de trabajos

Norms for submission of papers

Código de ética



www.inec.gob.ec | www.ecuadorencifras.com

Normas para la presentación de trabajos

Los autores están invitados a enviar sus artículos a la revista Analítica, ya sea en español o en inglés.

Para la publicación de los artículos, los autores deben seguir los siguientes lineamientos:

Originalidad

El trabajo presentado se entenderá que es inédito, original y que no se ha presentado a ningún otro medio antes de conocer la decisión de esta revista. Si el artículo ha sido publicado en otra revista, impresa o digital, este deberá tener el permiso o autorización de la revista, detallando el nuevo aporte o modificación correspondiente. Después de la aceptación, la autorización deberá ser enviada al editor de la revista Analítica.

Presentación

Los artículos deberán ser presentados en formato digital, el cual puede ser *.pdf* o *.doc*. Comprometiéndose el autor o los autores, a proporcionar el trabajo en formato *.tex* (siguiendo los estándares de la American Mathematical Society (AMS)), si el mismo es aceptado para su publicación.

Toda la documentación correspondiente debe remitirse al editor de la revista Analítica, al siguiente correo electrónico: analitika@inec.gob.ec / analitika@analitika.ec.

Requerimientos técnicos

Para ser sometidos a revisión, los trabajos deberán cumplir los siguientes requerimientos técnicos:

- Las ilustraciones y tablas, deben estar numeradas secuencialmente, incluyendo una descripción explicativa para cada una.
- Las figuras deben tener formato *.eps*, de preferencia, o formato *.jpg*, o *.png* de alta resolución.
- El texto en las figuras y mapas debe escribirse con letras fácilmente legibles.
- Diferentes elementos de un gráfico deben contener sus correspondientes explicaciones. Por ejemplo, en un gráfico de pastel se deberá especificar qué representa cada color.

- Asegúrese de que las inscripciones o detalles, así como las líneas, tengan tamaños y grosores adecuados; de tal manera que sean legibles (números, letras y símbolos).
- Las fotografías deben grabarse con alto contraste y en alta resolución. Recuerde que las fotografías frecuentemente pierden contraste en el proceso de la impresión. No combine fotografías y dibujos en la misma figura.
- Si las figuras, gráficos, ilustraciones o fotografías incluidas en el trabajo tienen derecho de autor, es responsabilidad del autor que presenta el trabajo a evaluación, obtener el permiso correspondiente para su uso.
- Los gráficos, ilustraciones y fotografías incluidas en el trabajo deben ser enviados en una carpeta exclusiva, la cual debe llevar el nombre: "Figuras_(las dos primeras iniciales del título del artículo en mayúsculas)".
Por ejemplo, si el trabajo tiene como título: "Densidad poblacional del Ecuador continental", el nombre de la carpeta debe ser: "Figuras_DP".
- El formato general para la etiquetas identificativas de los diversos ambientes deberá ser:

Para tablas:
`\label{DP_tab:001}`

Para figuras
`\label{DP_fig:001}`

Para ecuaciones
`\label{DP_eq:001}`

Para definiciones
`\label{DP_def:001}`

Para teoremas
`\label{DP_teo:001}`

etc.

Estructura y formato

La estructura del documento será de la siguiente forma:

Obligatorias	Opcionales
Título	Agradecimientos
Resumen	Recomendaciones
Palabras clave	Futuros trabajos
Abstract	Anexos
Keys words	
Clasificación	
Introducción	
Marco Teórico o Metodología	
Aplicación o Resultados	
Conclusiones	
Referencias	

Tabla 1. Estructura del documento a ser evaluado.

Formato del documento

Detallaremos las particularidades a considerar, para algunos de los componentes del documento.

Título. El título debe incluir la siguiente información: título del artículo, nombre completo del autor o de los autores, dirección del autor o de los autores, incluyendo su correo electrónico.

Resumen (Abstract). El resumen debe ser en español y en inglés. El resumen debe ser corto y conciso (máximo 250 palabras) y en el mismo se debe expresar los resultados relevantes del estudio. Debe ser informativo y no indicativo; por ejemplo diga:

“En este trabajo se analiza el papel que desempeñan las características individuales, familiares y laborales en la probabilidad de tener un contrato temporal frente a un contrato indefinido,”

lo cual es informativo. No diga

“La probabilidad de tener un contrato temporal frente a un contrato indefinido es discutido y aceptado,”

lo cual es indicativo.

Palabras claves (Keywords). Las palabras claves deben ser de tres a seis y, representarán los principales temas del artículo. Deberán ser colocadas al final del resumen y del abstract, respectivamente.

Clasificación. Se debe incluir el sistema de clasificación del Journal of Economic Literature, JEL.

Referencias. La sección de referencias debe incluir todas las publicaciones citadas en el texto. No se debe incluir reportes no publicados u otro tipo de información que no es posible verificar. Las tesis deben citarse únicamente cuando estén disponibles para consulta en una biblioteca física o virtual. En el texto las referencias deben ir en orden alfabético y deben seguir el sistema “inicial del nombre apellido”. Las referencias de portales electrónicos deben seguir un esquema similar al de las publicaciones, pero adicionalmente se deberá incluir la fecha de consulta. A continuación se muestra un ejemplo:

Referencias

- [1] M. AGUAYO, y E. LORE, *Cómo hacer una Regresión Logística binaria paso a paso II análisis multivariante*, Fundación Andalucía Beturia para la Investigación en Salud, Dot. N° 0702013, (2007).
- [2] C. GAMERO, *Satisfacción Laboral y tipo de contrato en España*, Investigative Radiology 34, Vol. 10, 636 - 642, (1999).
- [3] LEY No. 100, *Código de la niñez y adolescencia*, Registro Oficial 737, Enero, (2003).
- [4] SCIENTIFIC INSTRUMENT SERVICES, Inc. 2006. *MASS Spectral Library*. En línea: <http://www.sisweb.com/software/ms/nist.htm>, Consulta: 10 de abril del 2010.

Agradecimientos. Los agradecimientos podrán incluirse como una sección, la cual deberá estar al final del artículo y constará de un párrafo.

Procedimiento editorial

Cuando el trabajo ha sido recibido por el editor, éste pasa por dos procesos de calificación. El primero, se lleva a cabo dentro de un consejo editorial interno que determinará la pertinencia y solvencia científica y, el segundo, es la evaluación por expertos nacionales o extranjeros, considerando el método *blind review*.

Si el artículo es aceptado para su publicación, éste pasará por las siguientes etapas:

1. El editor enviará al autor principal las observaciones realizadas por los evaluadores para que éste realice las correcciones y cambios necesarios. El tiempo asignado para esto no será mayor a un mes.
2. Cuando el trabajo corregido es regresado al editor, éste hará la copia-edición y empezará el proceso de formato. Después de que el trabajo ha sido formateado para la publicación, una prueba de impresión (“page proofs”) será enviada al autor para corregir posibles

errores. En este punto, no será posible hacer cambios en el documento, sino solamente corregir errores de edición o formato. El autor debe retornar la prueba de impresión al editor con sus observaciones, si las hubiere, máximo en una semana después de haberla recibido.

3. Finalmente, el documento corregido será archivado hasta que la revista empiece su proceso de impresión. Cuando esto ocurra, se enviará una copia impresa y una digital de la revista al autor.

Si el artículo no es aceptado para su publicación, será devuelto al autor notificando el motivo.

Comentarios finales

La publicación del volumen de la revista depende de la colaboración entre los autores, los revisores, la imprenta y el editor. La colaboración y cumplimiento de los plazos establecidos es fundamental.

La revista Analítica publica dos volúmenes por año.

Norms for submission of papers

All authors are invited to send their studies to Analítica Journal in Spanish or English; for being eligible to publish, the paper must meet the following guidelines:

Originality

The paper must be original, unpublished and not be submitted to any other media before knowing the decision of this journal. If the paper has been previously published in another journal, printed or digital, it must have a written permit or authorization detailing any addition or modification made since the last publication. After the acceptance of the paper, such authorization must be sent to the Editor of Analítica Journal.

Format

The papers must be sent in digital format, either **PDF** or **DOC**. If accepted for publication, the author(s) must send the document in **TEX** (according to the standards of the American Mathematical Society (AMS)) format.

All the documentation must be emailed to the Editor of Analítica Journal to: analitika@inec.gob.ec / analitika@analitika.ec.

Technical Requirements

For being subject for review, a paper must meet the following technical requirements:

- Each illustration and table must include an explicative description and be sequentially numbered.
- Pictures must be in format EPS (preferable), JPG or high-resolution PNG.
- Text inside maps or pictures must be easily legible.
- Each element within a graphic must contain its own explanation. For example, a pie chart must show what each color represents.
- Make sure the inscriptions, details and lines have adequate sizes and dimensions, so all numbers, characters and symbols are legible.

- Photographs must be saved in high contrast and high resolution. Remember that pictures usually lose contrast during the printing process. Do not put together photographs and drawings in the same picture.
- If the pictures, drawings, illustrations or photographs included in the paper are copyrighted, it is responsibility of the author of the study to obtain the permission to use that material.
- Pictures, illustrations and photographs included in the paper must be gathered in one single folder named: "Figures_(the first letter of the first two words of the title of the paper in capital letters)." For example, if the title of the paper is "Population density in mainland Ecuador", the name of the folder should be: "**Figures_PD**".
- The general format for the identification labels of different material is:

For tables:
`\label{PD_tab:001}`

For figures:
`\label{PD_fig:001}`

For equations:
`\label{PD_eq:001}`

For definitions:
`\label{PD_def:001}`

For theorems:
`\label{PD_teo:001}`

etc.

Structure and Style

The structure of the paper must be as follows:

Mandatory	Optional
Title	Acknowledgements
Abstract	Recommendations
Keywords	Future studies
Resumen	Appendix
Palabras clave	
Classification	
Introduction	
Theoretical framework or Methodology	
Application or Results	
Conclusions	
References	

Tabla 2. Paper structure for evaluation.

Style of the document

For some parts of the document, various particularities must be considered.

Title. The Title must include the following information: name of the study, name of the author(s), addresses and emails of the author(s).

Abstract (in Spanish: Resumen). The Abstract must be in Spanish and English. It must be short and concise (250 words maximum); it must show the relevant results of the study, be informative and not indicative. For example:

“This paper analyzes the role played by individual, familiar and labor characteristics in the probability of obtaining a temporary or an indefinite contract,”

is informative.

“The probability of obtaining a temporary or an indefinite contract is discussed and accepted,”

is indicative and should be avoided.

Keywords (in Spanish: Palabras claves). There must be between 3 and 6 keywords that represent the main topics of the study. They must go at the end of the Abstract and the Resumen.

Classification. The paper must include the classification system from Journal of Economic Literature, **JEL**.

References. This section must include all the publications quoted in the text; it should not include unpublished articles or any other unverifiable information. Thesis should only be quoted if they are available in a physical or digital library. References must be in alphabetical order by last names. References to websites must follow a scheme similar to publications, including the access date. For example:

Referencias

- [1] M. AGUAYO, y E. LORE, *Cómo hacer una Regresión Logística binaria paso a paso II análisis multivariante*, Fundación Andalucía Beturia para la Investigación en Salud, Dot. N° 0702013, (2007).
- [2] C. GAMERO, *Satisfacción Laboral y tipo de contrato en España*, Investigative Radiology 34, Vol. 10, 636 - 642, (1999).
- [3] LEY No. 100, *Código de la niñez y adolescencia*, Registro Oficial 737, Enero, (2003).
- [4] SCIENTIFIC INSTRUMENT SERVICES, Inc. 2006. *MASS Spectral Library*. En línea: <http://www.sisweb.com/software/ms/nist.htm>, Consulta: 10 de abril del 2010.

Acknowledgements. They could be included as a whole section, at the end of the document, in a single paragraph.

Editorial procedures

Once the paper has been received by the Editor, it undergoes two qualifying processes. The first is performed by an internal editorial board which will determine the pertinence and scientific content of the paper. The second one consists of a *blind review* made by local and foreign experts. If the draft is accepted for publishing, it shall go through the following stages:

1. The Editor will inform the author of any observation made by the evaluators, so all the necessary corrections and changes would be made. This must not exceed a month.
2. Once the corrected paper has been received, the Editor will perform the copying-editing process. After the document has been formatted, a page proof will be sent to the author to check edition or format mistakes; the author shall not make any change to the document. The author must return the proof page, along with any observation, to the Editor one week after having receiving it.

3. The final draft will be kept until the printing process starts. The author will receive a Journal in hard copy and digital format.

If the paper is not accepted for publication, it will be returned to the author explaining the reasons for such decision.

Final Comments

The publication of the journal depends on the cooperation of authors, evaluators, printing shop and Editor; collaboration and meeting deadlines is fundamental.

Analítica Journal is published twice a year.

Código de ética

Es fundamental contar con el aval del Committee on Publication Ethics (COPE) lo que nos ha permitido mejorar las prácticas de ética de las publicaciones que se ha promovido en diferentes ámbitos de la investigación [4, 2], tanto para editores [3], autores [5] y lectores [1].

Editores

Responsabilidades generales de los editores:

- Mejorar continuamente la revista.
- Garantizar la calidad de los artículos publicados.
- Cuidar la integridad de su experiencia académica.
- Publicar correcciones, aclaraciones, retractaciones y disculpas de ser necesarias.
- Proteger la propiedad intelectual y derechos de autor.
- Mantener independencia editorial.

Responsabilidades de los editores con los lectores:

- Ofrecer un producto que considere los estándares internacionales manejados por las revistas científicas de mayor prestigio.
- Asegurar que el material publicado fue sometido a revisión y aprobación.

Responsabilidades de los editores con los autores:

- Consensuar la calidad del material a publicarse.
- Aceptar o rechazar un artículo para su publicación, basándose en su importancia, originalidad, claridad, relevancia para la revista.
- Informar sobre el proceso de revisión de sus artículos por parte de sus pares.
- Estar preparado para justificar los procesos de revisión, en caso de requerir un informe por parte del autor.
- Mantener actualizada la norma de publicación de trabajos.
- Cumplir la decisión de aceptación o rechazo de un artículo para su publicación.

- Editores nuevos no deben revocar las decisiones de publicar documentos presentados por el editor anterior, salvo excepciones (cuando va en contra de la imagen institucional y/o de la revista).

Responsabilidades con los revisores:

- Publicar y mantener actualizada la norma de revisión de trabajos.
- Mantener comunicación constante con los revisores.

Proceso de revisión por pares:

- Asegurar que el material remitido para su revisión es confidencial mientras lo examinan.

Autores

Responsabilidades generales de los autores:

- Estructurar el artículo cumpliendo el método científico, conforme reglas gramaticales y las normas de publicación de trabajo¹.
- Presentar suficientes referencias de fuentes públicas.

Responsabilidades de los autores con los lectores:

- Asumir la responsabilidad pública del contenido.
- Proporcionar a los lectores interesados copias de los datos, manual de procedimiento, material experimental.

Responsabilidades de los autores con los editores:

- Defender el contenido del artículo (datos, metodología, conclusiones).
- Mantener comunicación constante con el editor en jefe, para correcciones y revisiones.

¹Normas de presentación de trabajos, Analítica, Revista de Análisis Estadístico

Lectores

Responsabilidades generales de los lectores:

- Referenciar la bibliografía del artículo usado².
- Participar en el desarrollo y progreso de la revista, enviando sugerencias de los artículos publicados³.

Responsabilidades de los lectores con los editores⁴:

- Hacer pública discrepancias a través de cartas al editor.
- Señalar errores especificando el artículo y el autor.

Responsabilidades de los lectores con los autores⁵:

- Tener una actitud crítica con el contenido publicado señalando los errores.
- Enviar su opinión, crítica o discusión directamente a la dirección del autor/autores.

*Puede encontrar más recursos en COPE (Committee on Publication Ethics - Comité de Ética de Publicación) [1].

Referencias

- [1] COMMITTEE ON PUBLICATION ETHICS, *Resources: Code of conduct*, COPE,

<http://publicationethics.org/resources/code-conduct>, (2011).

- [2] INTERNATIONAL COMMITTEE OF MEDICAL JOURNAL EDITORS, *Uniform requirements for manuscripts submitted to biomedical journals: writing and editing for biomedical publication*, ICMJE, www.icmje.org/urm_full.pdf, (2010).
- [3] KLEINERT, S. Y WAGER, E., *Responsible research publication: international standards for editors*, 2nd World Conference on Research Integrity, World Scientific Publishing, (2010).
- [4] SCOTT-LICHTER, D. Y EDITORIAL POLICY COMMITTEE, *Cse's white paper on promoting integrity in scientific journal publications*, Wheat Ridge, www.councilscienceeditors.org/files/public/entire_whitepaper.pdf, (2012).
- [5] WAGER, E. Y KLEINERT, S., *Responsible research publication: international standards for authors*, 2nd World Conference on Research Integrity, World Scientific Publishing, (2010).

² A1. AUTOR1 y A2. AUTOR2, *Título del artículo*. Analítica, Vol N°, ISSN: 1390-6208, (año). páginas.

^{3 4 5} El lector debe estar debidamente identificado.

Analítica

volumen

Revista de Análisis Estadístico
Journal of Statistical Analysis

3

ISSN 1390-6208
e-ISSN 1390-7867
Número 1 - 2012
enero - junio

Administración Central

Quito
Juan Larrea N15-36 y José Riofrío
Teléfonos: (593) 22544 326 - 22544 561
Fax: (593) 22509 836 Casilla postal: 135C
correo-e: planta_central@inec.gob.ec
analitika@inec.gob.ec



instituto nacional de estadística y censos