

Un Modelo Matemático para Esquemas Piramidales Tipo Ponzi

Analítica, No.1, pp 121-135, 2011

Juan Mayorga-Zambrano, PhD
PUCE Sede Ambato



INEC - 2013: Año Internacional de la Estadística

Resumen

Se establece un modelo estocástico que describe un esquema piramidal tipo Ponzi. Se estudia su comportamiento, su punto crítico (definido en términos del estado financiero de la captadora), su punto de saturación (definido en términos del capital real de la captadora) y se define un índice de referencia sobre la viabilidad futura del esquema. Adicionalmente, se hace la simulación de una versión simplificada del modelo y se establece el algoritmo para la implementación computacional del modelo general.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Introducción

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

¿Qué es una pirámide financiera?

Una **pirámide de captación financiera** es un esquema de negocios fraudulento que sustenta su operación en un crecimiento rápido del número de clientes. Tal crecimiento es gatillado por las referencias de clientes que perciben intereses muy por encima de lo que pueden pagar las empresas de inversiones que actúan en forma honesta.

Un esquema piramidal funciona mientras exista una cantidad suficiente de dinero fresco; caso contrario, se alcanza el **punto de saturación** y los clientes que se encuentran en ese instante en el sistema pierden su dinero.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

¿Qué es una pirámide financiera?

Una **pirámide de captación financiera** es un esquema de negocios fraudulento que sustenta su operación en un crecimiento rápido del número de clientes. Tal crecimiento es gatillado por las referencias de clientes que perciben intereses muy por encima de lo que pueden pagar las empresas de inversiones que actúan en forma honesta.

Un esquema piramidal funciona mientras exista una cantidad suficiente de dinero fresco; caso contrario, se alcanza el **punto de saturación** y los clientes que se encuentran en ese instante en el sistema pierden su dinero.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Albania

En 1997, unos dos millones de albaneses, un 60% de la población total, se vieron perjudicados por esquemas Ponzi, el tipo más peligroso de pirámides de captación, con pérdidas de unos 1.200 millones de dólares americanos. Albania por poco padece una guerra civil, miles murieron en esta crisis.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Esquema Ponzi

Un esquema Ponzi se presenta como una empresa mediadora de inversiones. Por lo general, los clientes no saben que son participantes de un esquema Ponzi: compraron la idea de que hay una inversión de altísimo retorno detrás del negocio.

Duplica o Triplica Tu Dinero Yá!

Aprende Yá!

Invierte En Petróleo, Oro, Euros.

Gana 100 a 200%

Abre Tu Cuenta Yá!

www.invertiractivos.com Anuncios Google

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Clave

Esta estafa consiste en que las ganancias que obtienen los clientes “recién llegados” al sistema son generadas por la siguiente generación de inversores que son seducidos por las promesas de obtener grandes beneficios.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Carlo & Baldomera

El nombre de este tipo de fraude se debe a Carlo Ponzi, quien en 1920 pasó de ser un emigrante italiano con un par de dólares en los bolsillos a millonario en Boston, Estados Unidos, todo en menos de 6 meses.

Su trama sin embargo no es la primera de la que se tiene registro: la fama del negocio de la española Baldomera Larra se expandió como plaga por Madrid en la década de 1870; operaba a la vista de todos pagando un 30% por ciento mensual, con el dinero fresco de los nuevos clientes.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Carlo & Baldomera

El nombre de este tipo de fraude se debe a Carlo Ponzi, quien en 1920 pasó de ser un emigrante italiano con un par de dólares en los bolsillos a millonario en Boston, Estados Unidos, todo en menos de 6 meses.

Su trama sin embargo no es la primera de la que se tiene registro: la fama del negocio de la española Baldomera Larra se expandió como plaga por Madrid en la década de 1870; operaba a la vista de todos pagando un 30% por ciento mensual, con el dinero fresco de los nuevos clientes.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Madoff & Cabrera

Un esquema Ponzi puede funcionar por un mayor tiempo que el de una pirámide tradicional en tanto que la tasa de interés ofertada sea alta pero no descabelladamente mayor al de inversiones legítimas (e.g. transacciones de divisas) pues esto atrae a un mayor número de personas. Debido a lo “beneficioso” del negocio, los clientes optan generalmente por reinvertir un alto porcentaje de su capital y de sus ganancias.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

El fraude Ponzi de Bernard Madoff alcanzó los 50.000 millones de dólares, el mayor fraude llevado a cabo por una sola persona. Madoff fue el presidente de una de las firmas de inversiones más importantes de Wall Street que lleva su nombre y que fundó en 1960.

“Sus fondos de inversión daban unos beneficios de entre el 10% y el 15% al año, lo cual es algo extraordinariamente bueno, pero no escandalosamente bueno. Y aunque lloviese o nevase fuera, él aseguraba ganancias cada mes... Cuando me he puesto a investigar sobre el particular me he encontrado con bastante literatura pero pocas matemáticas que expliquen el éxito inicial y el desplome posterior de estos instrumentos financieros... no he encontrado un modelo accesible y fácil que muestre el mecanismo de auge, colapso y caída de las pirámides financieras o, mejor, que pueda pronosticar su colapso a efectos didácticos para evitar en lo posible futuras víctimas de este timo financiero... ” [Mon08].

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

En diciembre de 2008 Madoff fue detenido por la FBI y acusado de fraude. El 29 de junio de 2009 fue sentenciado a 150 años de cárcel. Su hijo se suicidó.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

El caso del Notario Cabrera

¿Qué hubiera pasado si el notario Cabrera no moría “antes de tiempo”?

Por el caso “Notario Cabrera” de 2005 en Ecuador hubo suicidios y personas tuvieron que devolver autos y casas que habían adquirido pensando financiar los pagos con las ganancias de su inversión piramidal.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

DMG, DRFE, etc.

La ambición desmedida es el motor de un esquema piramidal.

La crisis de las pirámides de 2008 en Colombia mostró una notable presencia de estos esquemas (siendo los más famosos Proyecciones DRFE y DMG) especialmente en los departamentos de Nariño y Putumayo. Pueblos enteros fueron afectados pues muchas de las captadoras se escondían bajo figuras legales para inversiones legítimas.

“El síntoma del virus: el deseo de ganar dinero fácilmente, deseo de todos nosotros, fantasía - agravada por la ignorancia - de que no es tan difícil ganar dinero sin mayor esfuerzo... hay personas que explotan esa ignorancia en beneficio propio” [Lex08].

Es importante desarrollar y hacer más accesible la matemática que describe estos procesos en virtud del alto peligro que representa para el ciudadano promedio este tipo de estratagemas, especialmente por su alcance a través de internet.

“El síntoma del virus: el deseo de ganar dinero fácilmente, deseo de todos nosotros, fantasía - agravada por la ignorancia - de que no es tan difícil ganar dinero sin mayor esfuerzo... hay personas que explotan esa ignorancia en beneficio propio” [Lex08].

Es importante desarrollar y hacer más accesible la matemática que describe estos procesos en virtud del alto peligro que representa para el ciudadano promedio este tipo de estratagemas, especialmente por su alcance a través de internet.

Introducción

El modelo

Una simplificación interesante

References

¿Qué es una pirámide financiera?

Albania

Esquema Ponzi

Carlo & Baldomera

Madoff & Cabrera

DMG, DRFE, etc.

Ecuatorianos y colombianos tomaron préstamos de bancos para meter el dinero en las captadoras financieras. DMG afectó a unas 8000 personas en la ciudad de Pasto, aproximadamente el 5 % de la PEA (población económicamente activa) y a unas 240.000 personas en toda Colombia, el 1% de PEA (véase [Pan09]).

Introducción
El modelo
Una simplificación interesante
References

Antecedentes
Criterios de parada
Reglas de juego
Número de clientes
Capital y captación teóricos
Capital real y punto de saturación
Deudas y estado financiero
Robo pecuniario
Eficiencia y control

El modelo

Antecedentes

En [Art09], Artzrouni modela esquemas Ponzi (incluyendo e.g. sistemas de pensiones) mediante la ecuación diferencial

$$L(t + dt) = L(t) (1 + \eta dt) + p(t)dt - W(t)dt \quad (1)$$

donde el capital real, $L(t)$, es la suma de tres términos: una expansión por inversiones legítimas del capital real al instante previo (η representa la tasa nominal); el ingreso de dinero fresco, $p(t)dt$, producto de las captaciones a clientes nuevos; y una disminución producto de retiros que hacen los clientes, $W(t)dt$.

Artzrouni¹ se concentra su estudio en $L(t)$; se lo considera continuo en el tiempo lo que impide que se pueda hacer un seguimiento a los clientes conforme a su altura en la estructura piramidal.

Por otro lado, nuestro trabajo consiste en un modelo Ponzi estocástico donde tan importante como el capital real es el monto robado a los clientes, el estado financiero de la empresa captadora y su capital teórico (que define legalmente el tamaño de la estafa).

Artzrouni¹ se concentra su estudio en $L(t)$; se lo considera continuo en el tiempo lo que impide que se pueda hacer un seguimiento a los clientes conforme a su altura en la estructura piramidal.

Por otro lado, nuestro trabajo consiste en un modelo Ponzi estocástico donde tan importante como el capital real es el monto robado a los clientes, el estado financiero de la empresa captadora y su capital teórico (que define legalmente el tamaño de la estafa).

La empresa captadora juega en un tiempo $t \in [0, T]$, donde T es el instante en que la captadora deja de funcionar y huye con el dinero de sus clientes. En un tiempo $t \in [0, T]$, denotamos por $\hat{P}(t)$ al **capital teórico total** de los clientes. El capital $\hat{P}(t)$ permite establecer el tamaño de la estafa; sin embargo,

“¿dónde está el dinero de la pirámide de Madoff? Se ha diluido, volatilizado en los pagos de intereses y comisiones. Hay que tener presente que el valor-dinero del capital invertido por los clientes se erosiona permanentemente, desde el primer minuto. No hay que perder de vista que la supuesta permanencia (o crecimiento) del capital invertido (capital teórico en el modelo) sobre el que se paga a los clientes es una ficción”, [Mon08].

Criterios de parada

Establecemos un par de criterios de parada desde el punto de vista de la captadora, es decir buscamos que T sea lo más grande posible en virtud de su relación directa con las ganancias ilícitas. En un tiempo $t \geq 0$, denotamos por $F(t)$ al **estado financiero** de la captadora. El primer criterio de parada viene dado por la siguiente definición.

Definición

El **momento crítico** T_c es aquel en que el estado financiero de la captadora cambia por primera vez de signo:

- ❶ $F(T_c) = 0$;
- ❷ $F(t) > 0$, para todo $t \in [0, T)$;
- ❸ Si T_0 verifica i) y ii), entonces $T_c \leq T_0$.

El momento crítico es una variable aleatoria que depende de los diferentes parámetros y variables del sistema.

El criterio de parada provisto por la Definición anterior tiene que ver con la posibilidad de que el estado financiero de la captadora tenga algún tipo de **supervisión externa** (e.g. de algún organismo estatal). En los casos de fraude tipo Ponzi ha sido usual la ausencia o ligereza de este tipo de control.

Una captadora puede tener su estado financiero en negativo y, sin embargo, presentar mucho dinero en caja lo que usualmente lleva a los clientes a pensar que la empresa goza de buena salud.

Recuerde el caso Madoff...

Como consecuencia, la empresa puede continuar con su fraude por un tiempo adicional hasta que alcanza su punto de saturación.

Definición

El **punto de saturación** T_s es aquel en que el **capital real total**, $L(t)$, de la captadora cambia por primera vez de signo:

- ❶ $L(T_s) = 0$;
- ❷ $L(t) > 0$, para todo $t \in [0, T)$;
- ❸ Si T_0 verifica i) y ii), entonces $T_s \leq T_0$.

Como veremos más adelante, T_s tiene que ver con un número insuficiente de nuevos clientes.

La captadora parte con un *capital inicial* $E_0 > 0$ que suponemos grande: esto genera confianza en los primeros clientes (la parte superior de la pirámide), factor indispensable para el éxito futuro de la empresa.

En una pirámide no-Ponzi, usualmente un cliente tiene que reclutar a un cierto número de nuevos clientes para poder acceder a la ganancia prometida por la captadora. Por otro lado, en un esquema Ponzi un cliente no tiene obligación de traer clientes nuevos al sistema de manera que la velocidad de crecimiento de $\hat{P}(t)$ es menor que en una pirámide no-Ponzi comparable.

Por la misma razón, tanto T_c como T_s de un esquema Ponzi son mayores que sus pares en una pirámide no-Ponzi.

La captadora parte con un *capital inicial* $E_0 > 0$ que suponemos grande: esto genera confianza en los primeros clientes (la parte superior de la pirámide), factor indispensable para el éxito futuro de la empresa.

En una pirámide no-Ponzi, usualmente un cliente tiene que reclutar a un cierto número de nuevos clientes para poder acceder a la ganancia prometida por la captadora. Por otro lado, en un esquema Ponzi un cliente no tiene obligación de traer clientes nuevos al sistema de manera que la velocidad de crecimiento de $\hat{P}(t)$ es menor que en una pirámide no-Ponzi comparable.

Por la misma razón, tanto T_c como T_s de un esquema Ponzi son mayores que sus pares en una pirámide no-Ponzi.

Nuestra captadora fija el **capital de inversión inicial de un cliente** en $m > 0$, con $0 < m \ll E_0$. Suponemos que el valor m es tal que los potenciales clientes constituyan un gran segmento de la PEA en el área de influencia de la captadora.

Al restringir el capital inicial que puede invertir un cliente se frena el crecimiento de $\hat{P}(t)$ pero se gana en control, de manera que la captadora disminuye el riesgo de no poder escapar con las utilidades.

Nuestra captadora fija el **capital de inversión inicial de un cliente** en $m > 0$, con $0 < m \ll E_0$. Suponemos que el valor m es tal que los potenciales clientes constituyan un gran segmento de la PEA en el área de influencia de la captadora.

Al restringir el capital inicial que puede invertir un cliente se frena el crecimiento de $\hat{P}(t)$ pero se gana en control, de manera que la captadora disminuye el riesgo de no poder escapar con las utilidades.

Un cliente tiene derecho a ser parte del club de inversores tanto como quiera; pero si se desliga del sistema, se lo tratará como cliente nuevo si quiere reintegrarse: podrá invertir únicamente m .

Nuestra captadora fija el **capital de inversión inicial de un cliente** en $m > 0$, con $0 < m \ll E_0$. Suponemos que el valor m es tal que los potenciales clientes constituyan un gran segmento de la PEA en el área de influencia de la captadora.

Al restringir el capital inicial que puede invertir un cliente se frena el crecimiento de $\hat{P}(t)$ pero se gana en control, de manera que la captadora disminuye el riesgo de no poder escapar con las utilidades.

Un cliente tiene derecho a ser parte del club de inversores tanto como quiera; pero si se desliga del sistema, se lo tratará como cliente nuevo si quiere reintegrarse: podrá invertir únicamente m .

El **período de inversión**, $h \in (0, T)$, es un parámetro establecido por la captadora y se mantiene constante durante su funcionamiento. A un cliente antiguo se le concede la posibilidad de reinvertir un monto no mayor al último pago que recibió de parte de la captadora; es decir, si invierte $s > 0$, al fin del período de inversión puede reinvertir hasta $r \cdot s$, con $r = 1 + i_p$, donde $i_p > 0$ es la **taza de retorno** ofrecida por la captadora.

La captadora opera de continuo en $[0, T]$ pero realiza captaciones y pagos únicamente en los instantes

$$t_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (2)$$

donde $K \in \mathbb{N}$ es tal que $t_K \leq T < t_{K+1}$; el resto del tiempo la captadora supuestamente “dedica sus esfuerzos a su trabajo de inversión, para garantizar total seriedad en los pagos a sus clientes y analiza las solicitudes de membresía” de las personas referidas por clientes antiguos. Por tanto, en un *ciclo de captación* $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, t_{K-1}$, un cliente recibe $r = (1 + i_p)$ veces el monto invertido.

En virtud de (2) y de las definiciones ponemos

$$T_c = K_c \cdot h, \quad T_s = K_s \cdot h. \quad (3)$$

En un tiempo $t \in [0, T]$, el número de clientes está dado por $c(t) = c_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, donde suponemos que en la arista de la pirámide hay un único cliente, $c(0) = c_0 = 1$, y que al tiempo t_k el *número de clientes nuevos*, c_k , es un múltiplo aleatorio de C_{k-1} , el *número total de clientes* al tiempo t_{k-1} , es decir

$$c_k = N_k \cdot C_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

$$C_k = \sum_{j=0}^k c_j, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (5)$$

Por inducción se prueba, para $k \in \mathbb{N}$, que

$$c_k = N_k \cdot \prod_{j=1}^{k-1} (1 + N_j), \quad C_k = \prod_{j=1}^k (1 + N_j).$$

En [Art09], Artzrouni usa la suposición más simple que describe la rapidez con que se mueve un fraude piramidal (y el hecho de que eventualmente tiene que colapsar), esto es, el crecimiento exponencial del dinero fresco que entra al sistema:

$$p(t) = p_0 e^{r_i t}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

donde r_i es llamado tasa de inversiones. Nuestra suposición de crecimiento (4) es análoga a (6) pero nos provee mucho más información (con las limitaciones de todo modelo probabilístico).

En efecto, la densidad $p(t)$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} p(t + dt) - p(t) = r_i p(t) dt, & t \geq 0, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

en tanto que de (4) y (5) se tiene que

$$\begin{cases} C_k - C_{k-1} = N_k \cdot C_{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \\ C_0 = c_0. \end{cases}$$

El factor de expansión $N(t)$ representa el número de clientes nuevos que son atraídos por un cliente actual; está dado por $N(t) = N_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, donde al tiempo t_k suponemos que N_k sigue una distribución normal $\mathcal{N}(\bar{N}_k, \frac{h^2}{4})$.

Para la estimación de los valores esperados \bar{N}_k , usamos un modelo SIR sencillo que permite estudiar la manera en que se expande una enfermedad en una comunidad como función del tiempo.

$$\begin{cases} \dot{S} = -a S(t) I(t), \\ \dot{I} = a S(t) I(t) - b I(t), \\ S(0) = 1, \\ I(0) = \frac{1}{U}, \end{cases} \quad (7)$$

donde S representa la fracción de la PEA susceptible de ser infectada por el esquema piramidal e I representa la fracción de la PEA que está infectada (y que por tanto puede transmitir la enfermedad). Aquí U es el tamaño de la PEA en la zona de influencia de la captadora. Los parámetros a y b son positivos.

Entonces ponemos

$$\bar{c}_k = I(t_k) \cdot U, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (8)$$

y hallamos \bar{N}_k usando las relaciones (4) y (5), es decir,

$$\bar{c}_k = \sum_{j=0}^k \bar{c}_j, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (9)$$

$$\bar{N}_k = \frac{\bar{c}_k}{\bar{c}_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

donde por facilidad suponemos que las variables aleatorias N_k y C_{k-1} son independientes.

La **captación teórica** al tiempo t_k a los clientes que ingresaron al sistema al tiempo t_j , el valor que ve un cliente en su cuenta piramidal (análoga a una cuenta bancaria), es

$$P_{k,j} = m \cdot p_{k,j}, \quad (11)$$

donde la **matriz de captaciones** $(p_{k,j}) \in \mathcal{M}_K$, está dada por

$$p_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p), & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (12)$$

Aquí $\omega_{k,j}$ es una variable aleatoria que modela la **taza de retiro** del capital al tiempo t_k por parte de los clientes que ingresaron al sistema al tiempo t_j .

Cuando $k \geq j$, se tiene entonces que

$$p_{k,j} = c_j (1 + i_p)^{k-j} \prod_{l=0}^{k-j-1} (1 - \omega_{k-l,j}). \quad (13)$$

La **captación teórica total** es $P(t) = P_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, donde

$$P_k = \sum_{j=0}^k P_{k,j}. \quad (14)$$

Suponemos que $\omega_{k,j}$ sigue una distribución normal $\mathcal{N}(\bar{\omega}_{k,j}, \frac{h^2}{4})$, cuyo valor esperado está dado por interpolación:

$$\bar{\omega}_{k,j} = \begin{cases} (k-j)[\alpha(k-j) + \beta], & \text{si } k-j \leq p_1, \\ i_p, & \text{si } k-j > q_1, \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{t_{k_0} i_p - t_{k_1} u}{t_{k_0} t_{k_1}^2 - t_{k_0}^2 t_{k_1}}, \quad \beta = \frac{t_{k_1}^2 u - t_{k_0}^2 i_p}{t_{k_0} t_{k_1}^2 - t_{k_0}^2 t_{k_1}}.$$

Como se puede ver en (15), el valor medio de la tasa de retiros al tiempo t_k de los clientes que ingresaron al sistema al tiempo t_j depende exclusivamente del tiempo de permanencia en el sistema; esto queda determinado por el factor $k-j$.

Los coeficientes α y β están determinados por los puntos (t_{k_0}, u) y (t_{k_1}, i_p) que representan, respectivamente, la primera instancia en que el retiro se vuelve significativo y la primera instancia en que se retira toda la ganancia.

Lo anterior está respaldado por la experiencia observada en el sur de Colombia donde un gran número de personas dejaron eventualmente de trabajar para vivir exclusivamente de las ganancias jugosas que les proveían los esquemas piramidales.

Denotamos por η_k la **tasa nominal** en que realmente es invertido el dinero existente en el sistema al tiempo t_k^+ . Estos réditos son legítimamente obtenidos. En virtud de las fluctuaciones del mercado, es coherente suponer que para cada k , η_k sigue una distribución normal $\mathcal{N}(\bar{\eta}, \sigma^2)$, donde $\bar{\eta}$ es pequeño en comparación con i_p y la desviación estándar σ es bastante pequeña. El **capital teórico total** está dado entonces por

$$\hat{P}(t) = P(t) + E(t), \quad (16)$$

$$E(t) = E_0 \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (17)$$

donde $E(t)$ representa la expansión total del capital inicial E_0 .

El capital real está dado por $L(t) = L_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, con

$$\begin{cases} L_0 = E_0 + m, \\ L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k, \end{cases} \quad (18)$$

donde $(1 + \eta_{k-1})L_{k-1}$ es el producto de inversiones legítimas, $P_{k,k} = mc_k$ es el dinero fresco que entra al sistema y W_k el total de retiros en t_k :

$$\begin{cases} W_k = m \cdot w_k, \\ w_k = (1 + i_p) \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}. \end{cases} \quad (19)$$

El *total de retiros* está dado por

$$W(t) = \sum_{k \leq t/h} W_k. \quad (20)$$

Proposición

El paso de saturación, K_s está definido por el primer entero positivo k que verifica las desigualdades

$$\begin{cases} c_k - w_k \geq -(1 + \eta_{k-1})\lambda_{k-1}, \\ c_k - w_k < -(1 + \eta_{k-1})\lambda_{k-1}, \end{cases} \quad (21)$$

donde, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\lambda_k = L_k/m.$$

Es claro que

$$\begin{cases} \lambda_0 = \gamma + 1, \\ \lambda_k = (1 + \eta_{k-1})\lambda_{k-1} + c_k - w_k, \end{cases}$$

donde

$$\gamma = E_0/m \tag{22}$$

es el **capital inicial relativo**, que mide el tamaño del capital inicial en términos de la inversión base m .

Para estimar T_s y su distribución probabilística debe efectuarse un número suficiente de simulaciones. En un juego concreto de la captadora, al instante t_{k-1} , el lado derecho de las desigualdades (21) es conocido en tanto que el lado izquierdo se puede estimar. Por tanto, desde el punto de vista del estafador, el momento de huir con los dineros de los clientes es $T_* = h \cdot k_*$, donde k_* es el primer entero positivo tal que $\bar{c}_{k+1} - \bar{w}_{k+1} < -(1 + \eta_k)\lambda_k$.

En términos generales, la deuda a un cliente en particular es igual a la captación teórica correspondiente expandida por la tasa de retorno. Entonces la deuda al tiempo t_k a los clientes que ingresaron al sistema al tiempo t_j está dada por

$$D_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ (1 + i_p) \cdot P_{k,j}, & \text{si } j \leq k. \end{cases} \quad (23)$$

La **deuda total** a los clientes corresponde al tamaño legal de la estafa, está dada por $D(t) = D_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, donde

$$D_k = (1 + i_p) \cdot P_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

El estado financiero en t_k está dado por el estado financiero en t_{k-1} menos el monto de deudas contraídas y más el producto de inversiones legítimas en $[t_{k-1}, t_k)$, es decir

$$\begin{cases} F_0 = E_0 - i_p m, \\ F_k = F_{k-1} - P_k i_p + \eta_{k-1} L_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (25)$$

Proposición

El paso crítico K_c es el primer entero positivo k que verifica

$$\begin{cases} \gamma \geq v_k, \\ \gamma < v_{k+1}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{donde, } v_k = i_p \sum_{j=0}^k p_j - \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j \lambda_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De (26) es claro que T_c y γ son directamente proporcionales y es de interés establecer via simulaciones la relación de regresión que los vincula.

El robo pecuniario a un cliente es la diferencia entre su primera inversión y el total de retiros hasta que se retira del sistema o hasta que la captadora deja de funcionar. Entonces, en un tiempo $t \in (t_k^+, t_{k+1}^-)$, el **robo pecuniario total** está dado por

$$R(t) = \sum_{j=0}^k U_j(t), \quad (27)$$

donde

$$U_j(t) = m \cdot \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ c_j - \sum_{l=j+1}^k w_{l,j} \cdot p_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (28)$$

es el robo pecuniario a los clientes que ingresaron al tiempo t_j .

Proposición

Se tiene que $R(t) = f(t) - W(t)$, donde

$$f(t) = m \cdot C_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

representa la *captación real total*, es decir, el total de dinero fresco que ingresó al sistema hasta el tiempo t .

Sabemos que $L(t)$ crece enormemente pero tal crecimiento es compensado a su vez por el crecimiento del número total de clientes de manera que para hacer un seguimiento al grado de deterioro del sistema piramidal es importante considerar el **capital promedio**:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{L(t)}{C(t)}. \quad (29)$$

La **efectividad del sistema** se define como el cociente entre la ganancia real y el monto total de retiros pues mide, a cada instante, cuántas veces se ha multiplicado cada unidad monetaria pagada a los clientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{L(t) - E_0}{W(t)} \\ &= \frac{\lambda(t) - \gamma}{w(t)}.\end{aligned}\tag{30}$$

Una simplificación interesante

Simplificaciones

Consideramos un caso particular del modelo presentado. Como parte del juego de engaño, se establece un cupo de clientes nuevos que puede traer consigo un cliente antiguo. Un altísimo valor de i_p impulsa la ambición por dinero fácil (de potenciales clientes nuevos) que combinada con un sentimiento mal orientado de solidaridad (de los clientes actuales e.g. para con familiares, amigos, etc.) provoca que el cupo mencionado sea comunmente usado al máximo (hasta antes de llegar a T_s).

Suponemos entonces que N_k es constante e igual a $n \in \mathbb{N}$, $k \leq K_s$.
En este caso,

$$c_k = n(1+n)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

$$\mathcal{C}_k = (1+n)^k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (32)$$

En t_1 el sistema paga sus deudas y el primer cliente satisfecho decide reinvertir casi totalmente en el sistema; esto tiene sustento en que el monto pecuniario arriesgado es el mismo que en su primera inversión. Suponemos entonces que la tasa de retiro $w_{k,j}$ es constante e igual a un valor $0 < w \ll 1$. Este tipo de suposición se usó en [Art09] en el contexto del modelo a tiempo continuo (1); si bien no es realista, ayuda a describir el proceso que sigue un esquema Ponzi.

Puesto que para cada t_k el monto pecuniario arriesgado es siempre igual a su primera inversión, el razonamiento se repite, de manera que la matriz de captaciones está dada por

$$p_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ n(1+n)^{j-1}\hat{r}^{k-j}, & \text{si } j \leq k, \end{cases} \quad (33)$$

donde

$$\hat{r} = (1-w)(1+i_p). \quad (34)$$

La captación teórica total está determinada por

$$p_k = \hat{r}^k + n \sum_{j=1}^k \hat{r}^{k-j} (1+n)^{j-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (35)$$

Suponemos, como en [Art09], que durante $[0, T]$ existe estabilidad económica en la economía de manera que las fluctuaciones de la tasa nominal son despreciables: consideramos que para cada k , η_k es una constante η pequeña en comparación con i_p .

Sin embargo, no debe perderse de vista que la aparición del fenómeno piramidal afecta fuertemente a las economías locales (como en los casos de Colombia y Ecuador en 2008) y puede también afectar a naciones enteras (como el caso de Albania en 1997).

Se tienen las siguientes fórmulas

$$E(t) = E_0 \cdot (1 + \eta)^k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (36)$$

$$L_k = (1 + \eta)L_{k-1} + P_{k,k} - W_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (37)$$

$$W_k = (1 + i_p)wP_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (38)$$

$$v_k = i_p \sum_{j=0}^k p_j - \eta \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j. \quad (39)$$

El robo pecuniario a los clientes que ingresaron al tiempo t_j es

$$U_j(t) = m \cdot \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ p_{j,j} - w \cdot \sum_{l=j+1}^k p_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (40)$$

Tablas y gráficos

Implementamos este modelo en una hoja electrónica. Suponemos que h corresponde a 3 meses y usamos los siguientes parámetros:

Tabla 1. **Caso simplificado**

Parámetro	Valor
E_0	10'000000
w	0.1%
i_p	100%
n	3
m	500
c_0	1
η	2.5%

Tabla 2. **Número de clientes**

k	C_k
0	1
1	3
2	12
3	48
8	49152
9	196608
10	786432
15	805'306368
16	3221'225472

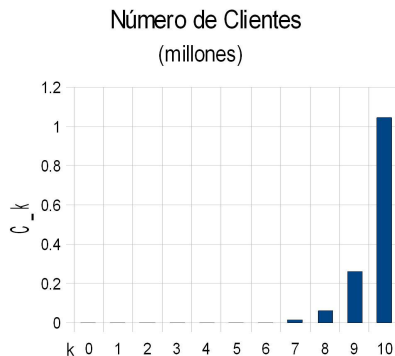


Tabla 3. **Expansión de E_0**

k	E_k (millones)
0	10.00
1	10.25
2	10.51
3	10.77
8	12.18
9	12.49
10	12.80
15	14.48
16	14.85

Expansión de capital inicial
(millones)

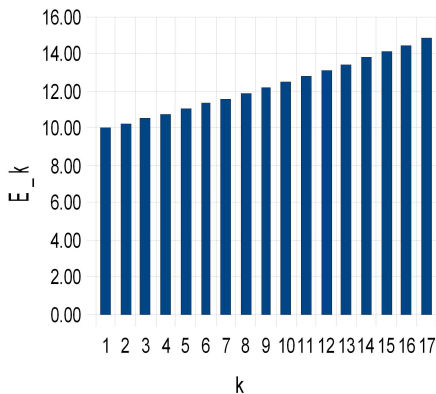


Tabla 4. **Tamaño estafa**

k	\hat{P}_k (millones)
0	0.00
1	0.25
2	0.02
3	0.09
8	89.33
9	357.4
10	1429.75
15	1464190.94
16	5856769.17

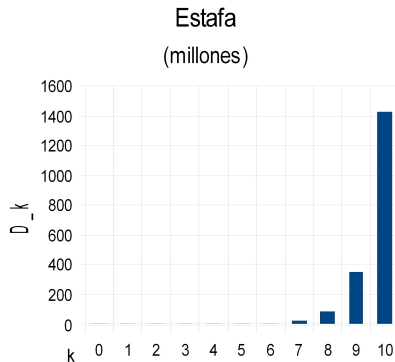


Tabla 5. **Retiros**

k	\hat{P}_k (millones)
0	0.00
1	0.25
2	0.02
3	0.09
8	89.33
9	357.4
10	1429.75
15	1464190.94
16	5856769.17

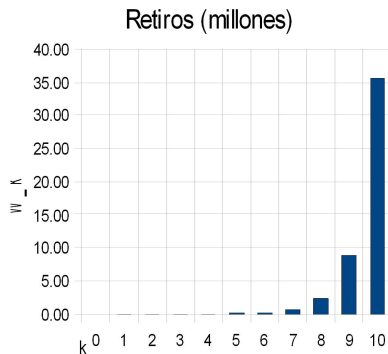


Tabla 6. **Estado financiero**

k	F_k (millones)
0	9.99
1	10.25
2	10.50
3	10.76
6	10.68
7	8.24
8	-2.44
9	-46.04
10	-221.43

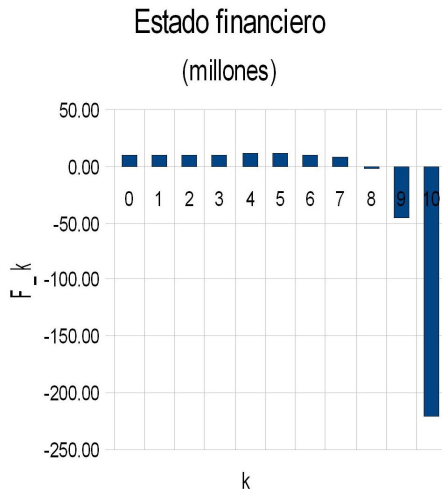
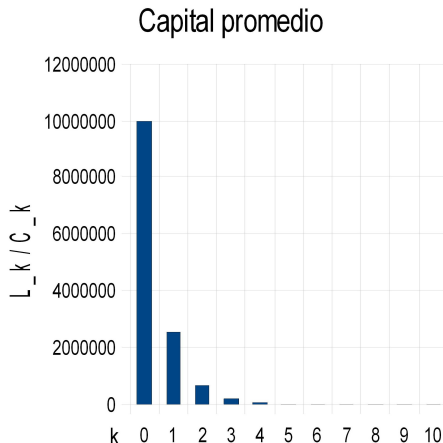






Tabla 7. **Capital promedio**

k	L_k/C_k
0	10'000500
1	2'562978
2	657108
3	168726
6	3290
7	1184
8	644
9	506
10	471



-  M. Artzrouni, *The mathematics of Ponzi schemes*, Munich Personal RePEc Archive, <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/14420> (2009).
-  LexBase, *Llegó a Colombia el Virus de la Pirámide*, El Tiempo (Colombia), <http://www.eltiempo.com/> (18 Noviembre de 2008).
-  J. Monzó, *¿Por qué colapsan las pirámides financieras? Caso Madoff*, Pensamiento Sistémico, <http://jmonzo.blogspot.com> (2008).
-  R. Pantoja, *Sigue desconsuelo de ex inversionistas. Visita presidencial con sabor agri dulce*, Diario del Sur (Colombia), <http://www.diariodelsur.com.co/> (26 Enero de 2009).