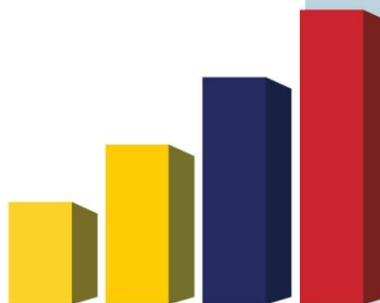


# Analítica

Un modelo matemático para esquemas  
piramidales tipo Ponzi

A mathematical model for Ponzi  
pyramid schemes

Juan Mayorga - Zambrano



[www.inec.gob.ec](http://www.inec.gob.ec) | [www.ecuadorencifras.com](http://www.ecuadorencifras.com)



# Un modelo matemático para esquemas piramidales tipo Ponzi

Juan Mayorga - Zambrano

*Departamento de Ciencias Exactas, Escuela Politécnica del Ejército, Avda. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador*

`jrmayorga@espe.edu.ec`

**Recibido:** 5 de noviembre de 2010

**Aceptado:** 1 de diciembre de 2010

## Resumen

Se establece un modelo estocástico que describe un esquema piramidal tipo Ponzi. Se estudia su comportamiento, su punto crítico (definido en términos del estado financiero de la captadora), su punto de saturación (definido en términos del capital real de la captadora) y se define un índice de referencia sobre la viabilidad futura del esquema. Adicionalmente, se hace la simulación de una versión simplificada del modelo y se establece el algoritmo para la implementación computacional del modelo general.

**Palabras claves:** modelamiento matemático, pirámides financieras, esquemas Ponzi, procesos estocásticos.

## Abstract

An stochastic model is established to describe a Ponzi's pyramidal scheme. We study its behavior, its critical point (defined in terms of the financial state), its saturation point (defined in terms of the total real capital), and it's defined an index to measure the scheme's viability. A simulation of a very simple version of the model and an algorithm is established to implement the general model.

**Keywords:** mathematical modeling, financial pyramidal schemes, Ponzi schemes, stochastic processes.

**JEL Codes:** C02, C12.

## 1 Introducción

Una pirámide de captación financiera es un esquema de negocios fraudulento que sustenta su operación en un crecimiento rápido del número de clientes. Tal crecimiento es impulsado por las referencias de clientes que perciben intereses muy por encima de lo que pueden pagar las empresas formales de inversión.

Un esquema piramidal es viable mientras exista un flujo suficiente de dinero fresco ingresando al sistema; caso contrario, se alcanza el punto de saturación y los clientes que se encuentran en ese instante en el sistema pierden su dinero.

Un esquema Ponzi se disfraza fácilmente de una empresa mediadora de inversiones, lo que le convierte en el tipo más peligroso de esquema piramidal. Por lo general, los clientes no saben que son participantes de un esquema Ponzi: compraron la idea de que hay una inversión de altísimo retorno detrás del negocio. Las ganancias que obtienen los clientes de la penúltima generación del sistema son generadas por la última generación.

### 1.1 Antecedentes históricos

El nombre de este tipo de fraude se debe a Carlo Ponzi, quien en 1920 pasó de ser un emigrante italiano con un par de dólares en los bolsillos a millonario en Boston, Estados Unidos, todo en menos de 6 meses. Su trama sin embargo no es la primera de la que se tiene registro: la fama del negocio de la española Baldomera Larra se expandió como plaga por Madrid en la década de 1870; operaba a la vista de todos, pagando un 30 % mensual, con el dinero fresco de los nuevos clientes [8].

En 1997, alrededor de 2000000 de albaneses, un 60 % de la población total, se vieron perjudicados por esquemas Ponzi con pérdidas de 1.200 millones de dólares americanos. Albania por poco padece una guerra civil, miles murieron en esta crisis [3].

Un esquema Ponzi puede funcionar por un mayor tiempo que el de una pirámide tradicional en tanto que la tasa de interés ofertada, siendo alta, no sea descabellada-

mente mayor a las tasa de retorno de inversiones legítimas (e.g. transacciones de divisas), pues esto atrae a un mayor número de personas. Debido a la alta rentabilidad del negocio, los clientes optan, generalmente, por reinvertir un alto porcentaje de su capital y de sus ganancias.

El esquema Ponzi de Bernard Madoff (detectado en diciembre 2008) cae en la última descripción. El fraude de Madoff alcanzó los 50.000 millones de dólares, el mayor llevado a cabo por una sola persona. Madoff fue el presidente de una de las firmas de inversiones más importantes de Wall Street, que lleva su nombre y que fundó en 1960.

Sus fondos de inversión daban unos beneficios de entre el 10% y el 15% al año, lo cual es algo extraordinariamente bueno, pero no escandalosamente bueno. Y aunque lloviese o nevase fuera, él aseguraba ganancias cada mes... [5].

En diciembre de 2008, Madoff fue detenido por el FBI y acusado de fraude. El 29 de junio de 2009 fue sentenciado a 150 años de cárcel [9].

## 1.2 Justificación

Este trabajo tiene su origen en la curiosidad propia del matemático y en el hecho de que personas cercanas al autor fueron afectadas por esquemas piramidales. ¿Cómo funciona este esquema al punto de engañar a miles de personas (incluyendo a personas con estudios universitarios)?

Cuando me he puesto a investigar sobre el particular me he encontrado con bastante literatura pero pocas matemáticas que expliquen el éxito inicial y el desplome posterior de estos instrumentos financieros... no he encontrado un modelo accesible y fácil que muestre el mecanismo de auge, colapso y caída de las pirámides financieras o, mejor, que pueda pronosticar su colapso a efectos didácticos para evitar en lo posible futuras víctimas de este timo financiero... [5].

La ambición desmedida es el motor de un esquema piramidal. La crisis de las pirámides de 2008 en Colombia mostró una notable presencia de estos esquemas (siendo los más famosos Proyecciones DRFE y DMG), especialmente en los departamentos de Nariño y Putumayo. Pueblos enteros fueron afectados, pues muchas de las captadoras se escondían bajo figuras legales para inversiones legítimas.

El síntoma del virus: el deseo de ganar dinero fácilmente, deseo de todos nosotros, fantasía - agravada por la ignorancia - de que no es tan difícil ganar dinero sin mayor esfuerzo... hay personas que explotan esa ignorancia en beneficio propio [4].

En este trabajo desarrollamos un modelo matemático que permite estudiar un tipo de esquemas Ponzi. Es importante desarrollar y hacer más accesible la matemática

que describe estos procesos en virtud del alto peligro que representa para el ciudadano promedio este tipo de fraudes, especialmente por su alcance a través de la Internet. No olvidemos el impacto social del caso "Notario Cabrera" de 2005 en Ecuador: hubo suicidios y personas tuvieron que devolver autos y casas que habían adquirido pensando financiar los pagos con las ganancias de su inversión piramidal. Ecuatorianos y colombianos llegaron a tomar préstamos de bancos legalmente constituidos para meter el dinero en las captadoras financieras. DMG afectó a unas 8000 personas en la ciudad de Pasto, aproximadamente el 5% de la PEA (población económicamente activa) y a unas 240.000 personas en toda Colombia, aproximadamente el 1% de PEA (véase [6]).

## 1.3 Descripción del trabajo

En [1], Artzrouni modela esquemas Ponzi — incluyendo casos análogos a sistemas de pensiones— mediante una ecuación diferencial para  $L(t)$ , el capital real,

$$L(t + dt) = L(t) (1 + \eta dt) + p(t)dt - W(t)dt, \quad (1)$$

donde  $t$  representa el tiempo. Conceptualmente, la estructura de (1) es la misma que nuestra sucesión de recurrencia

$$L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k,$$

véase (16), esto es, el capital real en un instante subsecuente es la suma de tres términos: primero, una expansión por inversiones legítimas del capital real al instante previo ( $\eta$  representa la correspondiente tasa nominal); segundo, el ingreso de dinero fresco,  $p(t)dt$ , producto de las captaciones a clientes nuevos; y tercero, una filtración de dinero producto de retiros que hacen los clientes  $W(t)dt$ .

En [1] el estudio tiene al capital real como elemento primordial; se lo considera continuo en el tiempo lo que impide que se pueda hacer un seguimiento a la situación de los clientes conforme a su altura en la estructura piramidal. Por otro lado, nuestro trabajo consiste en un modelo Ponzi estocástico donde tan importante como el capital real son el monto robado a los clientes. El estado financiero de la empresa captadora y su capital teórico (que define legalmente el tamaño de la estafa). Adicionalmente, establecemos como variable de control el cociente del capital real por el número de clientes que permite hacer un seguimiento a la salud del sistema.

En la Sección 2 presentamos el modelo general, empezando por los conceptos de momento crítico y punto de saturación. En la Sección 2.2, se introducen las reglas de juego de la empresa captadora. En la Sección 2.3 se estudia el crecimiento del número de clientes, la esencia de un esquema piramidal. En la Sección 2.4 se estudian los valores teóricos de captación y capital. En la Sección 2.5 se plantean las relaciones para el capital real y el punto de saturación. En la Sección 2.6 se establece el monto legal de la estafa y la fórmula de recurrencia para el estado financiero de la pirámide. En la Sección 2.7 se establece el monto

extraído del pecunio de los clientes. En la Sección 2.8 se proponen formulaciones para hacer un seguimiento a la salud y eficiencia del esquema Ponzi.

En la Sección 3 se particulariza las formulaciones de la Sección 2 a un caso que a pesar de su enorme simplicidad permite visualizar los alcances perjudiciales de un esquema Ponzi. El algoritmo en pseudocódigo para su implementación computacional es presentado en la Sección 4.

## 2 El modelo

La empresa captadora juega en un tiempo  $t \in I \equiv [0, T)$ , donde  $T$  es el instante en que la captadora deja de funcionar y huye con el dinero de sus clientes. Estimar  $T$  en base a algún criterio razonable es uno de los objetivos de nuestro estudio.

Al tiempo  $t \in I$ , denotamos por  $\hat{P}(t)$  al capital teórico total, es decir, la cantidad de dinero que la captadora financiera finge tener en sus arcas. En un esquema piramidal  $\hat{P}(\cdot)$  es una función creciente, es decir:

$$\hat{P}(t_B) \geq \hat{P}(t_A), \quad \text{para } 0 \leq t_A < t_B \leq T.$$

El capital teórico total permite establecer el tamaño legal de la estafa,  $D(t)$ , es decir, los derechos que tienen los acreedores en papeles al tiempo  $t$ . Como se verá más adelante,

$$D(t) = (1 + i_p) \cdot [\hat{P}(t) - E(t)], \quad \text{para } t \in I,$$

donde  $E(t)$  representa la expansión del capital inicial  $E_0$  al tiempo  $t \in I$  e  $i_p > 0$  es la *taza de retorno* ofrecida por la captadora para un *período básico de inversión*  $h \in (0, T)$ , que puede ser 1 mes, 2 meses, etc. Pero,

¿dónde está el dinero de la pirámide...? Se ha diluido, volatilizado en los pagos de intereses y comisiones. Hay que tener presente que el valor-dinero del capital invertido por los clientes se erosiona permanentemente, desde el primer minuto. No hay que perder de vista que la supuesta permanencia (o crecimiento) del capital invertido (capital teórico en el modelo) sobre el que se paga a los clientes es una ficción, [5].

Para determinar la cantidad de dinero que se ha extraído de su pecunio a los clientes se define en la Sección 2.7 el robo pecuniario total  $R(t)$ ,  $t \in I$ .

### 2.1 Criterios de parada

Establecemos un par de criterios de parada teniendo en mente que la captadora desea que  $T$  sea lo más extenso posible en virtud de su relación directa con las ganancias ilícitas. El primer criterio de parada se establece en términos del *estado financiero*,  $F(t)$ ,  $t \in I$  de la captadora.

**DEFINICIÓN 1.** El punto crítico  $T_c$  es aquel en que el estado financiero de la captadora cambia por primera vez de signo, esto es:

1.  $F(T_c) = 0$ ;
2.  $F(t) > 0$ , para todo  $t \in (0, T_c)$ ;
3. Si  $T_0$  verifica i) y ii), entonces  $T_c \leq T_0$ .

El criterio de parada provisto por la Definición 1 tiene que ver con la posibilidad de que el estado financiero de la captadora tenga algún tipo de supervisión externa (e.g. de algún organismo estatal). En los casos de fraude tipo Ponzi ha sido usual la ausencia o ligereza de este tipo de control. Más aún, como veremos más adelante, una captadora puede tener su estado financiero en negativo y, sin embargo, presentar mucho dinero en caja lo que usualmente lleva a los clientes a pensar que la empresa goza de buena salud. Como consecuencia, la empresa puede continuar con su fraude por un tiempo adicional hasta que alcanza su punto de saturación.

**DEFINICIÓN 2.** El punto de saturación  $T_s$  es aquel en que el capital real total,  $L(t)$ , de la captadora cambia por primera vez de signo:

1.  $L(T_s) = 0$ ;
2.  $L(t) > 0$ , para todo  $t \in [0, T)$ ;
3. Si  $T_0$  verifica i) y ii), entonces  $T_s \leq T_0$ .

**OBSERVACIÓN 1.** Téngase presente que los puntos crítico y de saturación son variables aleatorias que dependen de los diferentes parámetros y variables del sistema. Como veremos más adelante,  $T_s$  tiene que ver con un número insuficiente de nuevos clientes.

### 2.2 Reglas de juego

La captadora parte con un capital inicial  $E_0 > 0$  que suponemos grande: esto genera confianza en los primeros clientes (la parte superior de la pirámide), factor indispensable para el éxito futuro de la empresa.

En una pirámide no-Ponzi, usualmente un cliente tiene que reclutar a un cierto número de nuevos clientes para poder acceder a la ganancia prometida por la captadora. Por otro lado, en un esquema Ponzi un cliente no tiene obligación de traer clientes nuevos al sistema de manera que las velocidades de crecimiento de  $\hat{P}(t)$  y  $R(t)$  son menores que en una pirámide no-Ponzi comparable. Por la misma razón, en términos generales, tanto  $T_c$  como  $T_s$  de un esquema Ponzi son mayores que sus pares en una pirámide no-Ponzi.

Nuestra captadora fija la *inversión inicial de un cliente* en  $m > 0$ , con

$$0 < m \ll E_0$$

y tal que los potenciales clientes constituyan un gran segmento de la PEA en el área de influencia de la captadora. Al restringir el capital inicial que puede invertir un cliente

se frena el crecimiento de  $\hat{P}(t)$  y  $R(t)$  pero se gana en control, de manera que la captadora disminuye el riesgo de no poder escapar con las utilidades.

Un cliente tiene derecho a ser parte del club de inversores tanto tiempo como quiera; pero, si se desliga del sistema, se lo tratará como cliente nuevo si quiere reintegrarse: podrá invertir únicamente  $m$ .

El período básico de inversión,  $h \in (0, T)$ , es un parámetro establecido por la captadora y se mantiene constante durante su funcionamiento. A un cliente antiguo se le concede la posibilidad de reinvertir un monto no mayor al último pago que recibió de parte de la captadora; es decir, si invierte  $s > 0$ , al fin del período de inversión puede reinvertir hasta  $r \cdot s$ , con  $r = 1 + i_p$ .

La captadora opera de continuo en  $[0, T)$  pero realiza captaciones y pagos únicamente en los instantes

$$t_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (2)$$

donde  $K \in \mathbb{N}$  es tal que  $t_K \leq T < t_{K+1}$ ; el resto del tiempo la captadora supuestamente "dedica sus esfuerzos a su trabajo de inversión, para garantizar total seriedad en los pagos a sus clientes y analiza las solicitudes de membresía" de las personas referidas por clientes antiguos. Por tanto, al tiempo  $t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ , un cliente recibe  $r = (1 + i_p)$  veces el monto invertido al tiempo  $t_k$ . Estimar  $T_c$  y  $T_s$  corresponde entonces a determinar  $K_c$  y  $K_s$  de manera que

$$T_c = K_c \cdot h, \quad T_s = K_s \cdot h.$$

Hasta antes de un cierto  $t_{k_0}$  primero se paga y luego se capta inversiones; esto ayuda a captar clientes en las etapas iniciales de la captadora. Sin embargo, usando como argumento la asimetría entre el número de clientes nuevos potenciales con respecto al número de clientes antiguos, se establece que a partir de  $t_{k_0+1}$  primero se capta y luego se paga. Esto permite a la captadora presentar un saldo en caja positivo hasta antes del punto de saturación.

### 2.3 Número de clientes

En un tiempo  $t \in I$ , el número de clientes está dado por

$$\mathcal{C}(t) = C_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

donde suponemos que en la arista de la pirámide hay  $c_0$  clientes, y que al tiempo  $t_k$  el número de clientes nuevos,  $c_k$ , es un múltiplo aleatorio de  $C_{k-1}$ , es decir

$$c_k = N_k \cdot C_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

de manera que

$$C_k = \sum_{j=0}^k c_j, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4)$$

Por inducción se prueba, para  $k \in \mathbb{N}$ , que

$$c_k = N_k \cdot \prod_{j=1}^{k-1} (1 + N_j), \quad C_k = \prod_{j=1}^k (1 + N_j).$$

**OBSERVACIÓN 2.** En [1], Artzrouni supone que la rapidez con que se mueve un fraude piramidal corresponde un crecimiento exponencial del dinero fresco que entra al sistema,

$$p(t) = p_0 e^{r_i t}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

donde  $r_i$  es llamado tasa de inversiones. Nuestra suposición de crecimiento, (3), corresponde a un crecimiento cuasi-exponencial; es análoga a (5) pero nos provee mucho más información con las limitaciones propias de un modelo probabilístico. En efecto, la densidad  $p(t)$  es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} p(t+dt) - p(t) = r_i p(t) dt, & t \geq 0, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

en tanto que de (3) y (4) se tiene que

$$\begin{cases} C_k - C_{k-1} = N_k \cdot C_{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \\ C_0 = c_0. \end{cases}$$

**OBSERVACIÓN 3.** Por  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , indicamos que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución normal de media  $\mu \in \mathbb{R}$  y varianza  $\sigma^2 > 0$ . Por  $\Pr\{X \in A\}$  denotamos la probabilidad de que los valores de la variable aleatoria  $X$  caigan en la región medible  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

El factor de expansión  $N(t)$  representa el número de clientes nuevos que son atraídos por un cliente actual; está dado por

$$N(t) = N_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

donde al tiempo  $t_k$  suponemos que

$$N_k \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\bar{N}_k, \frac{1}{4}\right), \quad (6)$$

de manera que

$$\Pr[\bar{N}_k - 1 \leq N_k \leq \bar{N}_k + 1] = 0,9544.$$

Para la estimación de los valores esperados  $\bar{N}_k$ , usamos un modelo SIR sencillo que permite estudiar la manera en que se expande una enfermedad en una población como función del tiempo:

$$\begin{cases} \dot{S} = -a S(t) \mathcal{I}(t), \\ \dot{\mathcal{I}} = a S(t) \mathcal{I}(t) - b \mathcal{I}(t), \\ S(0) = 1 - \frac{1}{\mathcal{U}}, \\ \mathcal{I}(0) = \frac{1}{\mathcal{U}}, \end{cases} \quad (7)$$

donde  $S$  representa la fracción de la PEA susceptible de ser infectada por el esquema piramidal e  $\mathcal{I}$  representa la fracción de la PEA que está infectada (y que por tanto puede transmitir la enfermedad). Aquí  $\mathcal{U}$  es el tamaño de la PEA en la zona de influencia de la captadora. Los parámetros  $a$  y  $b$  son

positivos y deben ser estimados a partir de información de esquemas Ponzi concretos. Entonces ponemos

$$\bar{C}_k = \mathcal{I}(t_k) \cdot \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y hallamos  $\bar{N}_k$ , usando las relaciones (3) y (4), es decir,

$$\bar{N}_k = \frac{\bar{C}_k}{\bar{C}_{k-1}} - 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

donde, por simplicidad, suponemos que las variables aleatorias  $N_k$  y  $C_{k-1}$  son independientes.

## 2.4 Capital y captación teóricos

La *captación teórica* al tiempo  $t_k$  a los clientes que ingresaron al sistema al tiempo  $t_j$  es el valor que ve un cliente en su cuenta piramidal (análoga a una cuenta bancaria). Está dada por

$$P_{k,j} = m \cdot p_{k,j}, \quad (9)$$

donde la *matriz de captaciones* (adimensional)  $(p_{k,j}) \in \mathcal{M}_{K_s}$ , está dada por

$$p_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_j, & \text{si } j = k, \\ p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p), & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (10)$$

Aquí  $\omega_{k,j}$  es una variable aleatoria que modela la *taza de retiro* del capital al tiempo  $t_k$  por parte de los clientes que ingresaron al sistema al tiempo  $t_j$ . Cuando  $k > j$ , se tiene entonces que

$$p_{k,j} = c_j (1 + i_p)^{k-j} \prod_{l=0}^{k-j-1} (1 - \omega_{k-l,j}). \quad (11)$$

La *captación teórica total* está dada por

$$P(t) = P_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (12)$$

donde,

$$P_k = \sum_{j=0}^k P_{k,j}.$$

Para la *taza de retiro* se supone que

$$\omega_{k,j} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\bar{\omega}_{k,j}, \sigma_1^2),$$

donde  $0 < \sigma_1 < 1$ . Se tiene que

$$\Pr[\bar{\omega}_{k,j} - 2\sigma_1 \leq \omega_{k,j} \leq \bar{\omega}_{k,j} + 2\sigma_1] = 0,9544.$$

El valor esperado está dado por interpolación:

$$\bar{\omega}_{k,j} = \begin{cases} (k-j)[\alpha(k-j) + \beta], & \text{si } k-j \leq d_1, \\ \omega^*, & \text{si } k-j > d_1, \end{cases} \quad (13)$$

con

$$\alpha = \frac{d_1 \omega_* - d_0 \omega^*}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2}, \quad \beta = \frac{d_0^2 \omega^* - d_1 \omega_*}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2},$$

$$\omega^* = \frac{i_p}{i_p + 1}.$$

Como se puede ver en (13), el valor medio de la *taza de retiros* al tiempo  $t_k$  de los clientes que ingresaron al sistema al tiempo  $t_j$  depende exclusivamente del tiempo de permanencia en el sistema; esto queda determinado por el factor  $d = k - j$ . Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  están determinados por los puntos  $(d_0, \omega_*)$  y  $(d_1, \omega^*)$  que representan los valores esperados, respectivamente, de la primera instancia en que el retiro se vuelve significativo y de la primera instancia en que se retira toda la ganancia.

**OBSERVACIÓN 4.** La hipótesis (13) fue motivada por la experiencia observada en el sur de Colombia, donde un gran número de personas dejaron eventualmente de trabajar para vivir exclusivamente de las ganancias jugosas que les proveían los esquemas piramidales.

Denotamos por  $\eta_k$  la *tasa nominal* en que realmente es invertido el dinero existente en el sistema al tiempo  $t_k^+$ . Estos réditos son legítimamente obtenidos. En virtud de las fluctuaciones del mercado (en una economía estable), es coherente suponer que para cada  $k$ ,

$$\eta_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(\bar{\eta}, \sigma_2^2),$$

donde  $0 < \bar{\eta} < i_p$  y  $0 < \sigma_2 < 1$ . Se tiene, para cada  $k$ , que

$$\Pr[\bar{\eta} - 2\sigma_2 \leq \eta_k \leq \bar{\eta} + 2\sigma_2] = 0,9544.$$

El *capital teórico total* está dado entonces por

$$\hat{P}(t) = P(t) + E(t), \quad (14)$$

$$E(t) = E_0 \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (15)$$

donde  $E(t)$  representa la *expansión del capital inicial*  $E_0$ .

## 2.5 Capital real y punto de saturación

El *capital real* está dado por

$$L(t) = L_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

donde

$$\begin{cases} L_0 = E_0 + m c_0, \\ L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k \end{cases} \quad (16)$$

En (16),  $(1 + \eta_{k-1})L_{k-1}$  es el producto de inversiones legítimas,  $P_{k,k} = m c_k$  es el dinero fresco que entra al sistema y  $W_k$  el *total de retiros* en  $t_k$ :

$$\begin{cases} W_k = m \cdot w_k, \\ w_k = (1 + i_p) \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}. \end{cases} \quad (17)$$

Para futura referencia ponemos

$$W(t) = W_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

**PROPOSICIÓN 1.** El paso de saturación,  $K_s$  está definido por el primer entero positivo  $k$  que verifica las desigualdades

$$\begin{cases} c_k - w_k \geq -(1 + \eta_{k-1})\lambda_{k-1}, \\ c_k - w_k < -(1 + \eta_{k-1})\lambda_{k-1}, \end{cases} \quad (18)$$

donde, para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$\lambda_k = L_k/m.$$

*Demostración.* Úsense (16) (10) y (17).  $\square$

La Proposición 1 establece que el punto de saturación queda determinado por cantidades adimensionales. En efecto, es claro que

$$\begin{cases} \lambda_0 = \gamma + c_0, \\ \lambda_k = (1 + \eta_{k-1})\lambda_{k-1} + c_k - w_k, \end{cases}$$

donde

$$\gamma = E_0/m \quad (19)$$

es el *capital inicial relativo*, que mide el tamaño del capital inicial en términos de la inversión base  $m$ .

**OBSERVACIÓN 5.** Para estimar  $T_s$  y su distribución probabilística debe efectuarse un número suficiente de simulaciones. En un juego concreto de la captadora, al instante  $t_{k-1}$ , el lado derecho de las desigualdades (18) es conocido en tanto que el lado izquierdo se puede estimar. Por tanto, desde el punto de vista del estafador, el momento de huir con los dineros de los clientes es  $T_* = h \cdot k_*$ , donde  $k_*$  es el primer entero positivo tal que

$$\bar{c}_{k+1} - \bar{w}_{k+1} < -(1 + \eta_k)\lambda_k,$$

donde  $\bar{c}_{k+1} = \bar{C}_{k+1} - \bar{C}_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

## 2.6 Deudas y estado financiero

En términos generales, la deuda de un cliente en particular es igual a la captación teórica correspondiente expandida por la tasa de retorno. Entonces, la deuda al tiempo  $t_k$  a los clientes que ingresaron al sistema al tiempo  $t_j$  está dada por

$$D_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ (1 + i_p) \cdot P_{k,j}, & \text{si } j \leq k. \end{cases} \quad (20)$$

La *deuda total* a los clientes corresponde al tamaño legal de la estafa, está dada por

$$D(t) = D_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

donde

$$D_k = (1 + i_p) \cdot P_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

El *estado financiero* en  $t_k$  está dado por el estado financiero en  $t_{k-1}$  menos el monto de deudas contraídas y más el producto de inversiones legítimas en  $[t_{k-1}, t_k)$ , es decir

$$\begin{cases} F_0 = E_0 - i_p m c_0, \\ F_k = F_{k-1} - P_k i_p + \eta_{k-1} L_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (22)$$

**PROPOSICIÓN 2.** El paso crítico  $K_c$  es el primer entero positivo  $k$  que verifica

$$\begin{cases} \gamma \geq v_k, \\ \gamma < v_{k+1}, \end{cases} \quad (23)$$

donde,

$$v_k = i_p \sum_{j=0}^k p_j - \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j \lambda_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Usando (22) y (11), se obtiene  $F_k = E_0 - m \cdot v_k$ , y se concluye por (19).  $\square$

**OBSERVACIÓN 6.** De (23) es claro que  $T_c$  y  $\gamma$  son directamente proporcionales y es de interés establecer via simulaciones la relación de regresión que los vincula.

## 2.7 Robo pecuniario

El *robo pecuniario* a un cliente es la diferencia entre su primera inversión y el total de retiros hasta que se retira del sistema o hasta que la captadora deja de funcionar. Entonces, el *robo pecuniario total* está dado por

$$R(t) = R_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

donde

$$R_k = \sum_{j=0}^k U_{j,k}(t), \quad (24)$$

donde

$$U_{j,k}(t) = m \cdot \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ c_j - \sum_{l=j+1}^k \omega_{l,j} \cdot p_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases}$$

es el robo pecuniario al tiempo  $t_k$  a los clientes que ingresaron al tiempo  $t_j$ .

**PROPOSICIÓN 3.** Se tiene, para  $t \in I$ , que

$$m \mathcal{C}(t) - W(t) = R(t) \leq D(t), \quad (25)$$

donde  $m \mathcal{C}(t)$  es la captación real total, es decir, el total de dinero fresco que ingresó al sistema.

La demostración es simple y la dejamos al lector.

## 2.8 Eficiencia, control y monto total de retiros

En nuestro modelo  $L(t)$  crece a un ritmo cuasi-exponencial pero tal crecimiento es compensado a su vez por el crecimiento del número total de clientes de manera que para hacer un seguimiento al deterioro del sistema piramidal es importante considerar el *capital promedio*:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{L(t)}{\mathcal{C}(t)}. \quad (26)$$

Se tiene entonces que el valor esperado del capital promedio,  $E[\mathcal{L}(t)]$ , es una función decreciente en  $[0, T_s]$  y

$$E[\mathcal{L}(T_s)] = 0. \quad (27)$$

La *efectividad del sistema*,  $\mathcal{E}(t)$ , se define como el cociente entre la ganancia real y el monto total de retiros, pues mide, a cada instante, cuántas veces se ha multiplicado cada unidad monetaria pagada a los clientes. Entonces

$$\mathcal{E}(t) = \frac{L(t) - E_0}{W(t)} = \frac{\lambda(t) - \gamma}{w(t)}, \quad (28)$$

donde  $w(t) = W(t)/m$ .

## 3 Una simplificación interesante

Consideramos un caso particular del modelo presentado en la Sección 2. Esta simplificación permite ver el rápido crecimiento de un esquema Ponzi y verificar que una captadora puede tener un estado financiero negativo cuando tiene mucho dinero en caja, es decir un capital real positivo. Por otro lado, esta simplificación no permite determinar  $T_s$  pues asume que la población de clientes potenciales es infinita.

### 3.1 Formulaciones

Como parte del juego de engaño, se establece un cupo de clientes nuevos que puede traer consigo un cliente antiguo. Un altísimo valor de  $i_p$  impulsa la ambición por dinero fácil (de potenciales clientes nuevos) que combinada con un sentimiento mal orientado de solidaridad (de los clientes actuales e.g. para con familiares, amigos, etc.) provoca que el cupo mencionado sea comunmente usado al máximo. Suponemos entonces que  $N_k$  es constante e igual a  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . En este caso,

$$c_k = n(1+n)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

$$\mathcal{C}_k = (1+n)^k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (30)$$

En  $t_k$  el sistema paga sus deudas y un cliente satisfecho decide reinvertir casi totalmente en el sistema; esto tiene sustento en que el monto pecuniario arriesgado es el

mismo que en su primera inversión. Suponemos entonces que la tasa de retiro  $\omega_{k,j}$  es constante e igual a un valor  $0 < \omega < 1$ .

**OBSERVACIÓN 7.** Este tipo de suposición se usó en [1] en el contexto del modelo a tiempo continuo (1); si bien no es realista, ayuda a describir el proceso que sigue un esquema Ponzi.

La matriz de captaciones está dada por

$$p_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ n(1+n)^{j-1}\hat{r}^{k-j}, & \text{si } j \leq k, \end{cases} \quad (31)$$

donde

$$\hat{r} = (1-\omega)(1+i_p).$$

La captación teórica total está determinada por

$$P_k = m \left( \hat{r}^k + n \sum_{j=1}^k \hat{r}^{k-j} (1+n)^{j-1} \right), \quad k \in \mathbb{N} \quad (32)$$

Suponemos que existe estabilidad económica de manera que las fluctuaciones de la tasa nominal son despreciables: consideramos que para cada  $k$ ,  $\eta_k$  es una constante  $\eta$  pequeña en comparación con  $i_p$ . Sin embargo, no debe perderse de vista que la aparición del fenómeno piramidal afecta fuertemente a las economías locales (como en los casos de Colombia y Ecuador en 2008) y puede también afectar a naciones enteras (como el caso de Albania en 1997).

Se tienen las siguientes fórmulas

$$E_k = E_0 \cdot (1+\eta)^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (33)$$

$$L_k = (1+\eta)L_{k-1} + P_{k,k} - W_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (34)$$

$$W_k = (1+i_p)\omega P_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (35)$$

$$v_k = i_p \sum_{j=0}^k p_j - \eta \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j. \quad (36)$$

El robo pecuniario queda determinado por

$$U_j(t) = m \cdot \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ c_j - \omega \cdot \sum_{l=j+1}^k p_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (37)$$

En esta versión simplificada no existe punto de saturación de manera que la relación (27) no tiene sentido. Sin embargo, se tiene la siguiente

**PROPOSICIÓN 4.** Si  $n > \hat{r}$ , entonces existe  $\hat{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(t_k) = \hat{\mathcal{L}} < m. \quad (38)$$

*Demostración.* Úsense (30) y (34). □

### 3.2 Simulación

Implementamos en una hoja electrónica esta versión simplificada de nuestro modelo. Suponemos que  $h$  corresponde a 3 meses y usamos los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor
$E_0$	10'000,000
$\omega$	0,1 %
$i_p$	100 %
$n$	3
$m$	500
$c_0$	1
$\eta$	2,5 %

Tabla 1. Caso simplificado

Los valores de estos parámetros, en particular de  $i_p$ ,  $m$  y  $\eta$ , fueron escogidos tomando como referencia las características económicas de los Departamentos de Nariño y Putumayo en Colombia y de las Provincias del Carchi, Sucumbíos y Orellana en el norte de Ecuador. Resumimos los resultados en los gráficos del y tablas que siguen.

$k$	$C_k$
0	1
1	3
2	12
3	48
8	49152
9	196608
10	786432
15	805'306368
16	3221'225472

Tabla 2. Número de clientes

Número de Clientes  
(millones)

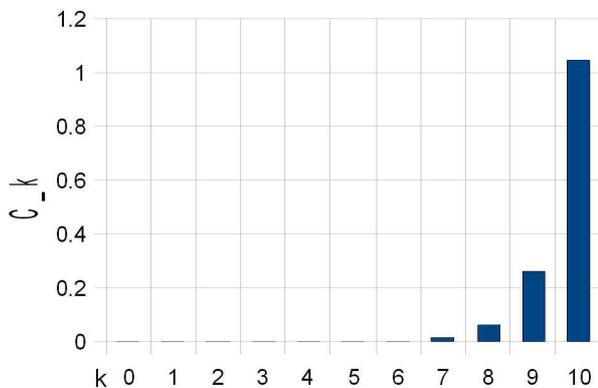


Figura 1. Número de clientes

Obsérvese en la tabla 2 que para  $k = 8$  el número de clientes es equivalente a la población total de un pueblo mediano, cercano a los 50.000 habitantes. Para  $k = 10$  se ha sobrepasado la población de Cuenca, la tercera ciudad de Ecuador.

$k$	$E_k$ (millones)
0	10,00
1	10,25
2	10,51
3	10,77
8	12,18
9	12,49
10	12,80
15	14,48
16	14,85

Tabla 3. Expansión de  $E_0$

Expansión de capital inicial  
(millones)

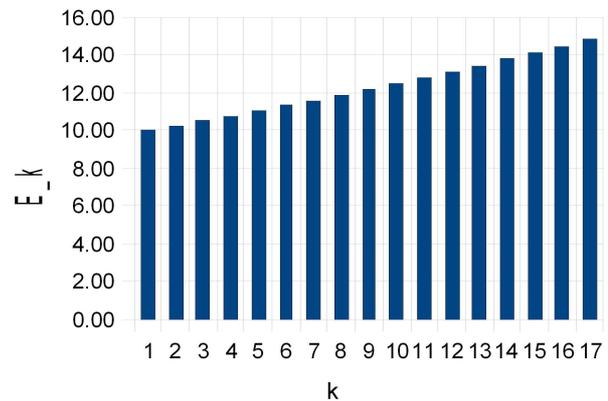


Figura 2. Expansión de  $E_0$

$k$	$\hat{P}_k$ (millones)
0	0,00
1	0,25
2	0,02
3	0,09
8	89,33
9	357,4
10	1429,75
15	1464190,94
16	5856769,17

Tabla 4. Tamaño estafa

Obsérvese en la tabla 3 que para  $k = 16$ , el capital inicial se ha incrementado en un 48.5% como producto de inversiones legítimas. Este desempeño es bueno pero insignificante con el tamaño de la estafa.

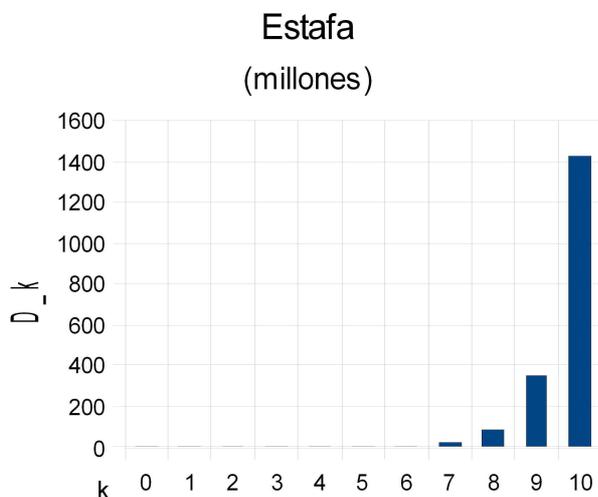


Figura 3. Tamaño estafa

$k$	$W_k$ (millones)
0	0,0000
1	0,0001
2	0,0005
3	0,0021
8	2,2320
9	8,9327
10	35,7397

Tabla 5. Retiros

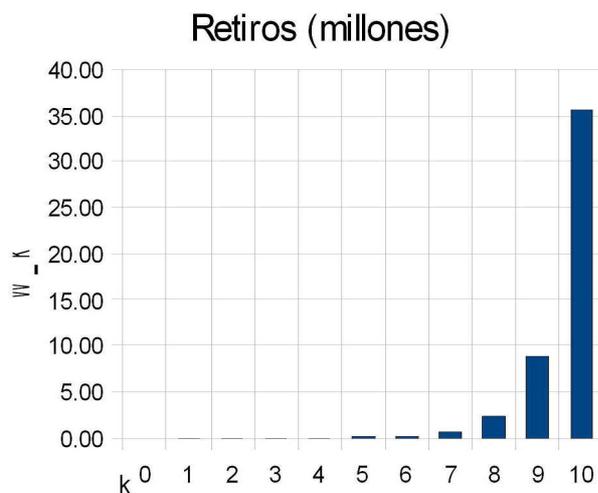


Figura 4. Retiros

Obsérvese en la tabla 5 que para  $k = 10$  los retiros apenas representan un 2.5% del tamaño de la estafa.

$k$	$F_k$ (millones)
0	9,99
1	10,25
2	10,50
3	10,76
6	10,68
7	8,24
8	-2,44
9	-46,04
10	-221,43

Tabla 6. Estado financiero



Figura 5. Estado financiero

Obsérvese en la tabla 6 que ya para  $k = 8$  el estado financiero ya cayó a valores negativos en tanto que el capital real es positivo.

$k$	$L_k/C_k$
0	10'000500
1	2'562978
2	657108
3	168726
6	3290
7	1184
8	644
9	506
10	471

Tabla 7. Capital promedio

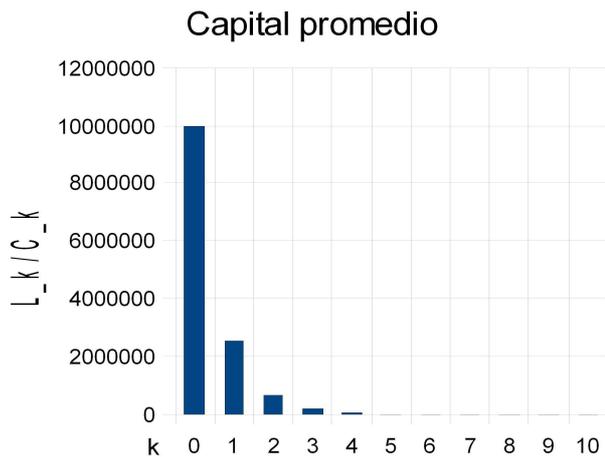


Figura 6. Capital promedio

Obsérvese en la tabla 7 que para el valor límite establecido en (38) se tiene  $\tilde{L} \approx 471 < m = 500$ .

## 4 Algoritmo general

Para simular el comportamiento de un esquema Ponzi como el del presente trabajo se podría usar el algoritmo 1. En él se utilizan dos funciones auxiliares:  $\text{Normal}(\mu; s^2)$  que es un generador de números aleatorios que siguen una distribución  $\mathcal{N}(\mu; s^2)$ , y  $\text{sir}(U, a, b)$  que resuelve numéricamente el sistema (7).

## 5 Conclusiones

Nuestro trabajo consiste en un modelo estocástico para un esquema piramidal tipo Ponzi que permite hacer un seguimiento al capital real, al monto robado a los clientes, al estado financiero de la empresa captadora y a su capital teórico. Estas ventajas compensan la mayor complejidad computacional con respecto al trabajo [1].

La determinación de los puntos crítico y de saturación está dada por el mecanismo interno del esquema Ponzi. Esto es evidenciado en las Proposiciones 1 y 2 donde las magnitudes que intervienen son adimensionales. Adicionalmente, en (26) establecemos el capital promedio como función de control para hacer un seguimiento a la salud del sistema. La simplificación descrita en la Sección 3 permite verificar el crecimiento cuasi-exponencial del dinero entrante al esquema Ponzi evidenciando su alto nivel de peligrosidad.

La continuación lógica de este trabajo es una implementación del algoritmo del modelo general que permita realizar un conjunto de análisis via simulaciones que, en proporción a la existencia de información, deberán contrastarse estadísticamente con esquemas Ponzi reales. Asimismo, sería interesante levantar la restricción sobre la inversión inicial de un cliente pues en la práctica es realmente una variable aleatoria antes que una constante. Organismos de control y de investigación de delitos económicos son potenciales clientes de este tipo de investigaciones, pues los fraudes piramidales siguen existiendo, sólo cambian de disfraces. El fraude Forex, [2], evidencia el uso de la Internet para seguir captando dinero de gente incauta.

## Referencias

- [1] M. Artzrouni. The mathematics of Ponzi schemes. *Munich Personal RePEc Archive*, <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/14420>, (2009).
- [2] G. Guillén. Un vendedor de cepillos que estafó a miles en 10 países. *El Universo (Ecuador)*, <http://www.eluniverso.com>, 14 Noviembre, (2010).
- [3] C. Jarvis. The rise and fall of albania's pyramid schemes. *Finance Development*, 37 (1), (2000).
- [4] LexBase. Llegó a Colombia el Virus de la Pirámide. *El Tiempo (Colombia)*, <http://www.eltiempo.com/>, 18 Noviembre, (2008).
- [5] J. Monzó. ¿Por qué colapsan las pirámides financieras? Caso Madoff. *Pensamiento Sistémico*, <http://jmonzo.blogspot.com>, (2008).
- [6] R. Pantoja. Sigue desconsuelo de ex inversionistas. Visita presidencial con sabor agridulce. *Diario del Sur (Colombia)*, <http://www.diariodelsur.com.co/>, 26 Enero de, (2009).
- [7] D. Pareja. Las matemáticas detrás de las pirámides invertidas de captación de dinero. *Universidad del Quindío*, <http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info>, (2008).
- [8] R. Torres. El arte de la estafa. *El País*, (2009).
- [9] United States Attorney Southern District of New York. Bernard I. madoff pleads guilty to eleven-count criminal information and is remanded into custody. *Release of the Department of Justice*, March 12, (2009).

**Algorithm 1:**  $(T_c, T_s) = \text{Ponzi}(h; c_0, U, a, b; m, E_0; i_p, \bar{\eta}, \sigma_1, \sigma_2; d_0, d_1, \omega_*)$

```

Input:  $h; c_0, U, a, b; m, E_0; i_p, \bar{\eta}, \sigma_1, \sigma_2; d_0, d_1, \omega_*$ 
Output:  $(T_c, T_s)$ 
// Initialize
1  $t_0 \leftarrow 0; p_0 \leftarrow c_0; C_0 \leftarrow c_0;$ 
2  $\omega^* \leftarrow \frac{i_p}{1 + i_p}; \alpha \leftarrow \frac{d_1 u - d_0 \omega^*}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2}; \beta \leftarrow \frac{d_0^2 \omega^* - d_1 u}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2};$ 
3  $L_0 \leftarrow E_0 + m; \gamma \leftarrow \frac{E_0}{m}; \lambda_0 \leftarrow \frac{L_0}{m}; F_0 \leftarrow E_0 - i_p \cdot m;$ 
// Determine  $(S, I) = (S, I)(t)$ 
4  $(S, I) \leftarrow \text{sir}(U, a, b);$ 
// Process
5  $k \leftarrow 1; Z \leftarrow L_0;$ 
6 while  $Z > 0$  do
7    $t_k \leftarrow k \cdot h;$ 
8    $\bar{N}_k \leftarrow \frac{I(t_k)}{I(t_{k-1})} - 1; N_k \leftarrow \text{Normal}(\bar{N}_k, 1/4);$ 
9    $c_k \leftarrow N_k \cdot C_{k-1}; C_k \leftarrow C_{k-1} + c_k;$ 
10  for  $j = 0, 1, \dots, k$  do
11    if  $k - j \leq d_1$  then  $\bar{\omega}_{k,j} = (k - j) \cdot [\alpha \cdot (k - j) + \beta];$  else  $\bar{\omega}_{k,j} = \omega^*;$ 
12     $\omega_{k,j} \leftarrow \text{Normal}(\bar{\omega}_{k,j}, \sigma_1^2);$ 
13  end
14  if  $j < k$  then  $p_{k,j} \leftarrow p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p);$  else  $p_{k,j} \leftarrow c_k;$ 
15  for  $l = 0, 1, \dots, k - 1$  do
16     $\eta_l \leftarrow \text{Normal}(\bar{\eta}, \sigma_2^2)$ 
17  end
18   $P_k \leftarrow m \cdot \sum_{j=0}^k p_{k,j}; E_k \leftarrow E_0 \cdot \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l);$ 
19   $\hat{P}_k \leftarrow P_k + E_k;$ 
20   $w_k \leftarrow (1 + i_p) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}; W_k \leftarrow m \cdot w_k;$ 
21   $\lambda_k \leftarrow (1 + \eta_{k-1}) \cdot \lambda_{k-1} + c_k - w_k; L_k \leftarrow m \cdot \lambda_k;$ 
22   $F_k \leftarrow F_{k-1} - P_k \cdot i_p + \eta_{k-1} \cdot L_{k-1};$ 
23  for  $j = 0, 1, \dots, k - 1$  do
24     $U_j \leftarrow m \cdot \left[ c_j - \sum_{l=j+1}^k \omega_{l,j} \cdot p_{l,j} \right];$ 
25  end
26   $U_k \leftarrow m \cdot c_k; R_k \leftarrow \sum_{j=0}^k U_j;$ 
27   $\mathcal{L} \leftarrow \frac{L_k}{C_k}; \mathcal{E}_k \leftarrow \frac{\lambda_k - \gamma}{w_k};$ 
28   $Z \leftarrow L_k; k \leftarrow k + 1;$ 
29 end

```