

Analítica

Efecto de la rentabilidad, volatilidad,
densidad de cotización y tipos de comisiones
en la riqueza terminal de una cuenta
individual de capitalización

Luis Chavez-Bedoya



www.ecuadorencifras.gob.ec



Efecto de la rentabilidad, volatilidad, densidad de cotización y tipos de comisiones en la riqueza terminal de una cuenta individual de capitalización

Luis Chavez-Bedoya^{† 1}

[†] Área de Finanzas, Esan Graduate School of Business,
Alonso de Molina 1652, Surco, Lima, Perú.

Resumen

En el presente artículo se analiza el efecto de la rentabilidad y volatilidad del fondo de pensiones, la densidad de cotización y las comisiones de administración en el valor esperado y la varianza de la riqueza terminal de una cuenta individual de capitalización. Asimismo, se presenta una metodología para representar comisiones de administración por flujo y aquellas por saldo, y compararlas entre sí a través del ratio de riqueza terminal esperada en exceso a desviación estándar. Finalmente, se realiza una aplicación práctica de la metodología y se muestran resultados en el marco del Sistema Privado de Pensiones del Perú.

Palabras clave: Fondo de pensiones, comisión por saldo, comisión por flujo, densidad de cotización, cuenta individual de capitalización.

Código JEL: G23.

Abstract

In this paper we analyze the effect of the pension fund's rate of return and volatility, density of contribution and administrative fees on the expected value and variance of the terminal wealth of an individual capitalization account. Also, we present a methodology to represent and compare front-end load and balance fees through the ratio of expected terminal wealth in excess to standard deviation. Finally, we apply the methodology and show results corresponding to the Peruvian Private Pension System.

Keywords: Pension fund, balance fee, front-end load fee, density of contribution, individual capitalization account.

¹lchavezbedoya@esan.edu.pe

1. Introducción

Durante el último cuarto del siglo pasado, muchos países latinoamericanos reformaron sus sistemas pensionarios, migrando de sistemas públicos de reparto a sistemas privados con cuentas individuales de capitalización (CIC)². Según Escrivá *et al.* (2010), a través de estos nuevos sistemas se buscaba adaptarse a los nuevos riesgos y retos que imponían a los países diversos factores como: la vulnerabilidad de las finanzas públicas, los cambios en las tasas de natalidad, la mayor longevidad de la población, los problemas de eficiencia en la administración pública y el mayor desarrollo potencial de los mercados financieros. Sin embargo, actualmente se sugiere llevar a cabo una nueva serie de reformas cuyos retos fundamentales, considerados en Kritzer *et al.* (2011), son aumentar la cobertura y competencia de los sistemas previsionales, así como reducir sus costos de administración.

Dos características importantes de un sistema pensionario con CIC son el hecho que el afiliado asume el riesgo derivado por la fluctuación del valor de los activos administrados, y que además los cargos administrativos (comisiones) cobrados por las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) tienen un impacto importante en el balance final de las CIC.³ Más aún, como se menciona en James. *et al.* (2001), Whitehouse (2001) y Mitchell (1998) una de las principales críticas a los sistemas con CIC es su elevado costo, pues este hecho no incentiva la participación, daña la imagen del sistema en su conjunto, reduce futuras pensiones e incrementa los costos futuros para el gobierno, de existir una pensión mínima garantizada.

De acuerdo con Kritzer *et al.* (2011), los cargos administrativos más comunes en sistemas de pensiones con CIC son: proporcionales por flujo (expresados como un porcentaje del salario o contribución), fijos por flujo, propor-

²El caso más documentado es Chile. El lector puede encontrar los aspectos principales de tal reforma en Arrau *et al.* (1993), Diamond y Valdés-Prieto (1994), Edwards (1998), Arenas de Mesa y Mesa-Lago (2006). En el caso del Perú, un análisis completo de la reforma del sistema de pensiones y su estado actual se expone en Marthans y Stok (2013). Sharpe (1998), Sinha (2000), Kay y Kritzer (2001), Mesa-Lago (2006) y Kritzer *et al.* (2011) son buenas referencias para el estudio de la reforma, situación y perspectiva de los sistemas pensionarios de América Latina.

³Devesa-Carpio *et al.* (2003) considera que el sistema de cobro adoptado en el sistema con CIC es muy importante, debido a que el proceso de acumulación es exponencial y dirigido hacia horizontes largos de tiempo. Por ejemplo, Murthi *et al.* (1999) estima que en el Reino Unido más del 40% del valor de la CIC se disipa a través de cobros de administración, mientras que Whitehouse (2001) determina que un cobro de uno por ciento anual de los activos representa cerca del 20% del valor final de la pensión.

cionales por saldo y proporcionales sobre rendimientos en exceso. El presente artículo analiza únicamente las comisiones proporcionales por flujo y saldo, las cuales son los tipos más comunes e importantes en Latinoamérica⁴. Para Sharpe (1998), la comisión por flujo es más ventajosa para las AFP en la fase inicial del sistema; adicionalmente, a pesar que la comisión por saldo alinea los objetivos de las AFP en términos de incrementar la rentabilidad del fondo⁵, ésta tiende a ser más cara en el largo plazo debido a que las CIC se incrementan en valor. Además, Shah (1997) afirma que la comisión por flujo genera distorsiones y tendencias indeseables, tales como promover altos costos de instalación de las AFP, desalentar la competencia del sistema y generar pérdidas para los afiliados de mayor edad.

En el presente artículo se analizan, a través de diversos ratios y medidas, el efecto de la rentabilidad y volatilidad del fondo de pensiones, la densidad de cotización y las comisiones de administración en la riqueza terminal de una (CIC). A partir del supuesto de que el valor cuota del fondo de pensiones representativo evoluciona en el tiempo según un movimiento Browniano geométrico, se brindan expresiones teóricas explícitas y/o recursivas para determinar el valor esperado y la varianza de la riqueza terminal de la CIC. Además, en la aplicación práctica al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP), se muestra que si la fase de acumulación es 45 años y la comisión por saldo es 1.00 % anual, entonces el porcentaje de riqueza terminal consumido por dicha comisión sería 23 % en el escenario moderado⁶ (rentabilidad real de 5 % anual para el fondo), 26 % en el escenario agresivo (rentabilidad real de 7 % anual) y 20 % en el escenario conservador (rentabilidad real de 2 % anual). En el caso de una comisión de 0.5 % anual, dichas pérdidas serían aproximadamente de 13 %, 15 % y 11 % para la fase de acumulación y nivel de comisión antes mencionados; y, para una comisión de 1.5 %, las pérdidas respectivas serían 33 %, 37 % y 28 %. En el caso de la comisión por flujo, ésta generaría un costo de oportunidad de 16 % para todo escenario de rentabili-

⁴Análisis y comparaciones de cargos administrativos en diferentes países se puede encontrar en James. *et al.* (2001), Whitehouse (2001), Gómez-Hernández y Stewart (2008), Corvera *et al.* (2006), Tapia y Yermo (2008) y Devesa-Carpio *et al.* (2003). Además, Sinha (2001), Masías y Sánchez (2007) y Martínez y Murcia (2008) evalúan en detalle (a pesar de que se han realizado modificaciones) los cargos administrativos en México, Perú y Colombia, respectivamente.

⁵Recientemente, en los resultados obtenidos por Medina *et al.* (2013) en el caso Chileno, no se encuentra evidencia para afirmar que las comisiones de administración (por flujo) influyan en los rendimientos obtenidos por los distintos fondos del sistema.

⁶Similar resultado al obtenido por Whitehouse (2001). Pero el resultado depende también del horizonte de aportación. Por ejemplo, si el horizonte es 25 años la pérdida sería 19 %, y si fuera 13 años la pérdida sería aproximadamente 10 %.

dad y horizonte de aportación, al asumir como su nivel al cargo promedio del SPP⁷. Más aún, se verifica que la densidad de cotización constituye un factor marginal en la determinación de los valores de los ratios que involucran (de manera relativa) al rendimiento esperado y la varianza de la riqueza terminal bajo ambos tipos de comisión.

La forma tradicional de comparar comisiones por saldo y flujo es a través de los valores esperados de los fondos bajo ambos esquemas de cobro al final del periodo de acumulación. Este enfoque se utiliza en Shah (1997), Diamond (2000), Blake y Board (2000), Whitehouse (2001), Devesa-Carpio *et al.* (2003) y Gómez-Hernández y Stewart (2008). Recientemente, y en el marco de la reforma del SPP, Moloche (2012), a través de un un modelo que maximiza la utilidad terminal del afiliado en un contexto de optimización dinámica, compara algunos escenarios de las comisiones por flujo y saldo. En nuestra investigación, e inspirados en Sharpe (1966), definimos como medida para comparar el desempeño de las comisiones al ratio de riqueza terminal esperada en exceso (riqueza terminal esperada bajo una tasa de capitalización ajustada por la tasa libre de riesgo) sobre la desviación estandar de riqueza terminal. Para los valores calibrados del SPP, se observa que la comisión por flujo tiene un mejor desempeño que la comisión por saldo, y que esta última tiende a mejorar a medida que la rentabilidad del fondo aumenta, la comisión por saldo disminuye, o se amplía el horizonte de aportación. Sin embargo, en el largo plazo, i.e., cuando la fase de acumulación tiende a infinito, la comisión por saldo, en teoría, tiende a ser superior a la de flujo. Asimismo, se encuentra que la densidad de cotización sigue teniendo un efecto marginal en el desempeño relativo de ambos esquemas de comisiones.

La estructura del presente trabajo de investigación es la siguiente: en la Sección 2 se propone una metodología para modelar (bajo interrupción de aportes) la riqueza terminal de una CIC y comparar comisiones por flujo y saldo. La aplicación práctica de la metodología propuesta al SPP se realiza en la Sección 3. Finalmente, en la Sección 4 se concluye, se brindan ciertas recomendaciones y se proponen algunas extensiones para la metodología.

2. Metodología

Consideremos $i \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{N}^+$ tales que $0 \leq i \leq T - 1$. El índice i representa un mes particular y T es el número de meses que faltan para la jubilación del afiliado. Asumimos que el valor cuota, V , de un fondo

⁷Al 16 de Mayo de 2014 tal cargo promedio es 1.58 % del salario del afiliado.

de pensiones representativo de una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP) en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ (meses) satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0. \quad (1)$$

En esta ecuación, μ es la tasa de crecimiento del valor cuota por unidad de tiempo (meses), σ la volatilidad del retorno logarítmico mensual del mismo, V_0 es el valor cuota inicial, y el proceso estocástico B es un movimiento Browniano estándar unidimensional. La EDE en (1) es una especificación común para modelar el valor cuota, pues es muy utilizada en modelos de control estocástico para fondos de pensiones⁸.

A continuación, describiremos con detalle las comisiones por saldo y flujo utilizando una estructura similar a la proporcionada en Shah (1997), Diamond (2000), Blake y Board (2000), Whitehouse (2001), Devesa-Carpio *et al.* (2003) y Gómez-Hernández y Stewart (2008).

2.1. Comisión por saldo

Sea $\delta > 0$ la comisión por saldo mensual expresada en tiempo continuo⁹. Además, en el mes i , el afiliado aporta una suma $W_i > 0$ a su fondo de capitalización individual. Si el valor cuota, V , se normaliza a la unidad en el periodo i , entonces el aporte W_i equivale al mismo número de cuotas. Es decir que, para $t \geq i$, y basándonos en la EDE (1), el aporte realizado en i seguiría el siguiente movimiento Browniano geométrico (GBM):

$$W_s^i(t) = W_i e^{(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2})(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \quad i \leq t \leq T. \quad (2)$$

Al afiliado le interesa determinar el valor final de su fondo, $W_s(T)$, el cual es la suma de los valores finales de todos los aportes realizados según la secuencia $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0, 0 \leq i \leq T - 1\}$. Entonces,

$$W_s(T) = \sum_{i=0}^{T-1} W_s^i(T), \quad (3)$$

⁸Es un supuesto común en la literatura el asumir el movimiento Browniano geométrico (GBM) como proceso para el valor cuota del fondo o para los precios de los activos que conforman el fondo. Algunos ejemplos del uso del GBM son: Blake *et al.* (2001), Devolder *et al.* (2003), Vigna (2010), Haberman y Vigna (2002), Battocchio y Menoncin (2004), Han y Hung (2012), y Cairns *et al.* (2006) entre otros. En el caso del estudio del SPP, Moloche (2012) utiliza en su metodología GBMs para modelar los activos de renta variable nacional e internacional.

⁹Un valor constante de δ podría implicar que el sistema ha alcanzado madurez con respecto a esta forma de cobro.

donde los procesos W_s^i en (2) están sujetos a la misma fuente de incertidumbre B dada por (1). Además, la esperanza, $\mathbb{E}[W_s(T)]$, del valor final del fondo es

$$\mathbb{E}[W_s(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{(\mu-\delta)(T-i)} = e^{(\mu-\delta)T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-(\mu-\delta)i}. \quad (4)$$

La siguiente proposición permite calcular explícitamente la varianza del fondo final del afiliado bajo comisión por saldo.

Proposición 2.1 (Varianza de riqueza terminal). *La varianza de $W_s(T)$ en (3) se puede calcular a través de la siguiente expresión*

$$\text{Var}(W_s(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (5)$$

Demostración: Ver Apéndice A. □

2.2. Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ la tasa de la comisión por flujo¹⁰. Si el afiliado realiza un aporte W_i en el mes i , la comisión que pagaría a la AFP (en el momento del aporte) sería igual a $C_i = W_i(1 - e^{-\alpha})$. Considerando que la comisión C_i pudo ser invertida en el fondo, el aporte del afiliado ajustado por el costo de oportunidad de C_i puede expresarse como $e^{-\alpha}W_i$. A partir de este supuesto, el aporte ajustado de la comisión por flujo en el mes i , W_f^i , evolucionaría según el siguiente GBM:

$$W_f^i(t) = W_i e^{-\alpha} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \quad i \leq t \leq T. \quad (6)$$

Para el afiliado, es importante calcular el monto del fondo final ajustado por el costo de oportunidad de la comisión por flujo según la secuencia de aportes $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0, 0 \leq i \leq T - 1\}$. Si denotamos dicho monto final como $W_f(T)$, se tiene

$$W_f(T) = \sum_{i=0}^{T-1} W_f^i(T). \quad (7)$$

Utilizando (4) y la Proposición 2.1, se demuestra fácilmente que la esperanza y la varianza de $W_f(T)$ se pueden calcular a través de las siguientes

¹⁰También se le conoce como comisión por sueldo, y puede ser cobrada como un porcentaje del salario o la contribución del afiliado.

expresiones:

$$\mathbb{E}[W_f(T)] = e^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{\mu(T-i)} = e^{-\alpha+\mu T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-\mu i}, \quad (8)$$

$$\text{Var}(W_f(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{-2\alpha+\mu(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (9)$$

Es importante recalcar que $W_f(T)$ no representa el verdadero monto final del fondo del afiliado, sino un monto final ajustado por el costo de oportunidad de la comisión por flujo. Además, el fondo final del afiliado sería igual a $e^\alpha W_f(T)$.

2.3. Interrupción de aportes

Existe la posibilidad de que el afiliado no sea capaz de contribuir con un monto $W_i > 0$ para todo i . Para representar tales interrupciones, introducimos un proceso estocástico $Z = \{Z_i, 0 \leq i \leq T - 1\}$, independiente del proceso B , tal que Z es una secuencia de variables aleatorias independientes $Z_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ con al menos un i^* tal que $p_{i^*} > 0$. Si $Z_i = 0$, entonces no existiría contribución en el periodo i , lo que ocurre con probabilidad $1 - p_i$. Asimismo, denotamos como \mathcal{P}_T a la secuencia de probabilidades de aportar, i.e., $\mathcal{P}_T = \{p_i \mid p_i \in [0, 1], 0 \leq i \leq T - 1\}$.

El proceso Z es una de las formas más simples de incluir interrupciones en la secuencia $\mathcal{W}_T = \{W_i \mid W_i > 0, 0 \leq i \leq T - 1\}$. Adicionalmente, \mathcal{W}_T podría ser interpretada como el flujo de contribuciones representativas para grupos homogéneos de afiliados compartiendo un mismo T . Por ejemplo, es posible determinar \mathcal{W}_T a través de proyecciones de salarios dependiendo de una tasa de crecimiento promedio que es a su vez función de la edad, el sexo, el nivel educativo, etc. Para incorporar el proceso de interrupción en las comisiones por flujo y saldo definimos:

$$\widehat{W}_s(T) = \sum_{i=0}^{T-1} Z_i W_s^i(T), \quad (10)$$

$$\widehat{W}_f(T) = \sum_{i=0}^{T-1} Z_i W_f^i(T), \quad (11)$$

donde $W_s^i(T)$ y $W_f^i(T)$ están dados por (2) y (6), respectivamente. Ambos $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ representan riqueza terminal (bajo los esquemas de saldo y

flujo) cuando las interrupciones se modelan a través del proceso estocástico Z .

Calculando los valores esperados de $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ tenemos

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T)] = e^{(\mu-\delta)T} \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i e^{-(\mu-\delta)i}, \quad (12)$$

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Z_i W_f^i(T)] = e^{-\alpha+\mu T} \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i e^{-\mu i}. \quad (13)$$

Para obtener (12) y (13), se ha utilizado la independencia de Z_i con respecto a $W_s^i(T)$ y $W_f^i(T)$. Las varianzas de $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ pueden ser determinadas utilizando la siguiente proposición:

Proposición 2.2 (Varianza de riqueza terminal con interrupción). *Bajo el proceso de interrupción Z , las varianzas de $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ en (10) y (11) son:*

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{W}_s(T)) &= \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{T-1} p_i (1-p_i) W_i^2 e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)(T-i)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{W}_f(T)) &= \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{-2\alpha+\mu(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{T-1} p_i (1-p_i) W_i^2 e^{-2\alpha+(2\mu+\sigma^2)(T-i)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Demostración: Ver Apéndice B. □

Si se asume $p_i = p$ con $p \in (0, 1]$ para todo $0 \leq i \leq T-1$, el afiliado tiene la misma probabilidad de contribuir en cada periodo (mes). En consecuencia, la probabilidad p se puede interpretar como la densidad de cotización del afiliado. En la siguiente proposición, analizamos el efecto de la densidad de cotización, p , sobre la varianza de la riqueza terminal ajustada.

Proposición 2.3 (Impacto de p en la varianza del fondo final). *En el proceso de interrupción Z se asume $p_i = p$ tal que $p \in (0, 1)$, y se consideran a $\text{Var}(\widehat{W}_s(T))$ en (14) y $\text{Var}(\widehat{W}_f(T))$ en (15) como funciones de p . Si $\sigma^2 > \ln(2p)$, entonces $\partial_p \text{Var}(\widehat{W}_s(p, T)) > 0$ y $\partial_p \text{Var}(\widehat{W}_f(p, T)) > 0$.*

Demostración: Ver Apéndice C. □

A partir de la Proposición 2.3 notamos que, si $p \leq \frac{1}{2}$, entonces siempre las varianzas de la riqueza terminal ajustada van a ser funciones crecientes en p . Si $p > \frac{1}{2}$, no es posible garantizar que la relación anterior se cumpla en todo escenario, y es por ello que se necesita la condición adicional $\sigma^2 > \ln(2p)$. Sin embargo, esta última es muy restrictiva (ver demostración), pues podrían existir condiciones menos estrictas que produjeran el mismo efecto de monotonicidad. Por ejemplo, en el caso de la comisión por saldo, bastaría verificar si $\sum_{i=1}^{T-1} \phi_{i,T}(e^{\sigma^2(T-i)} - 2p) > 0$, donde los pesos de la suma ponderada son $\phi_{i,T} = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)}$.

2.4. Relaciones recursivas

En esta sección, proporcionamos expresiones recursivas para calcular las esperanzas y varianzas de las riquezas terminales ajustadas $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ definidas en (10) y (11).

Proposición 2.4 (Recursiones para comisión por saldo). *Si $\widehat{W}_s(T)$ se define como en (10), entonces para $T \geq 2$ se cumple*

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] = e^{(\mu-\delta)}(\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T-1)] + p_{T-1}W_{T-1}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{W}_s(T)) &= e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} \left(\text{Var}(\widehat{W}_s(T-1)) + p_{T-1}(1-p_{T-1})W_{T-1}^2 \right) \\ &\quad + (e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]^2, \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_s(1)] = p_0W_0e^{\mu-\delta}, \quad (18)$$

$$\text{Var}(\widehat{W}_s(1)) = p_0^2W_0^2e^{2(\mu-\delta)}(e^{\sigma^2} - 1) + p_0(1-p_0)W_0^2e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2}. \quad (19)$$

Demostración: Ver Apéndice D. □

Proposición 2.5 (Recursiones para comisión por flujo). *Si $\widehat{W}_f(T)$ se define como en (11), entonces para $T \geq 2$ se cumple*

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)] = e^\mu(\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T-1)] + p_{T-1}e^{-\alpha}W_{T-1}), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{W}_f(T)) &= e^{2\mu+\sigma^2} \left(\text{Var}(\widehat{W}_f(T-1)) + p_{T-1}(1-p_{T-1})(e^{-\alpha}W_{T-1})^2 \right) \\ &\quad + (e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)]^2, \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_f(1)] = p_0 e^{-\alpha} W_0 e^{\mu}, \quad (22)$$

$$\text{Var}(\widehat{W}_f(1)) = p_0^2 (e^{-\alpha} W_0)^2 e^{+2\mu} (e^{\sigma^2} - 1) + p_0(1 - p_0) (e^{-\alpha} W_0)^2 e^{2\mu + \sigma^2} \quad (23)$$

Demostración: Se verifican los resultados al hacer $\delta = 0$ y considerar aportes $e^{-\alpha} W_i$ en las expresiones de la Proposición 2.4. \square

Los resultados anteriores nos brindan una forma eficiente de calcular las esperanzas y varianzas de riqueza terminal ajustada. Asimismo, en el caso que la tasa μ y la volatilidad σ del GBM del valor cuota cambiaran mes a mes, i.e., μ_i y σ_i para $0 \leq i \leq T-1$, los resultados de las Proposiciones 2.4 y 2.5 seguirían siendo válidos, siempre y cuando se reemplacen μ y σ por μ_{T-1} y σ_{T-1} . En el caso de comisiones variables en el tiempo, i.e., δ_i y α_i para $0 \leq i \leq T-1$, los resultados previos se pueden ajustar a esta nueva situación al reemplazar δ y α por δ_{T-1} y α_{T-1} , respectivamente.

2.5. Ausencia de comisiones de administración

Denotamos como $\widehat{W}(T)$ al valor del fondo final del afiliado en ausencia de comisiones pero bajo el proceso de interrupción Z , i.e., $\delta = 0$ o $\alpha = 0$ en las expresiones (10) y (11), respectivamente. Con lo cual se tiene

$$\widehat{W}(T) = \sum_{i=0}^{T-1} Z_i W^i(T), \quad (24)$$

donde

$$W^i(t) = W_i e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \quad i \leq t \leq T. \quad (25)$$

Utilizando (12) y la Proposición 2.2, la esperanza y varianza de $\widehat{W}(T)$ se pueden encontrar a través de

$$\mathbb{E}[\widehat{W}(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i e^{\mu(T-i)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{W}(T)) &= \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{\mu(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T - \max\{i,j\})} - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{T-1} p_i (1 - p_i) W_i^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T-i)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Además, se pueden construir las relaciones recursivas para el cálculo de $\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]$ y $\text{Var}(\widehat{W}(T))$ considerando las expresiones de la Proposición 2.4 y fijando $\delta = 0$. Recordar que este enfoque es más general pues permite tasas de crecimiento, volatilidades y comisiones variables en el tiempo. De manera similar, denotamos como $W(T)$ al valor del fondo final del afiliado en ausencia de comisiones e interrupciones, i.e., $Z_i = 1$ para todo i en $\widehat{W}(T)$. El valor esperado y la varianza de $W(T)$ se pueden obtener al hacer $p_i = 1$ para todo i en (26) y (27), respectivamente.

2.6. Comparación de comisiones por saldo y flujo

Un afiliado quiere determinar inicialmente la idoneidad de los esquemas de cobro de comisiones a partir de las variables aleatorias $\widehat{W}_s(T)$ y $\widehat{W}_f(T)$ dadas por (10) y (11), respectivamente. Es importante notar que al introducir el costo de oportunidad de la comisión por flujo en $\widehat{W}_f(T)$, las variables aleatorias antes mencionadas se vuelven comparables en cierto sentido; sin embargo, $\widehat{W}_f(T)$ no representa riqueza terminal sino riqueza terminal ajustada por un cierto costo de oportunidad. A partir de este hecho, se consideran las siguientes variables aleatorias:

$$\widetilde{W}_s(T) = \widehat{W}_s(T) + (1 - e^{-\alpha})\widehat{W}_s(T), \quad (28)$$

$$\widetilde{W}_f(T) = e^{\alpha}\widehat{W}_f(T) = \widehat{W}(T). \quad (29)$$

Notar que $\widetilde{W}_s(T)$ en (28) es la suma del valor terminal del fondo bajo comisión por saldo, $\widehat{W}_s(T)$, más los valores terminales de las comisiones ahorradas con respecto a la comisión por flujo, $(1 - e^{-\alpha})\widehat{W}_s(T)$; éstas se han reinvertido en la CIC del afiliado bajo el mecanismo de aportes voluntarios. Bajo este esquema, $\widetilde{W}_s(T)$ representa la riqueza terminal del afiliado, bajo comisión por saldo asumiendo que el ahorro producido por las comisiones por flujo no desembolsadas se reinvierten en las mismas condiciones que los aportes regulares por saldo¹¹. Por otro lado, $\widetilde{W}_f(T)$ representa la verdadera riqueza terminal del afiliado bajo comisión por flujo y por ende es igual a $\widehat{W}(T)$ definida en (24). Entonces, a partir de las definiciones (28) y (29), se estarían comparando riquezas terminales bajo ambos tipos de comisión.

Si se define

$$\nu = \ln(2 - e^{-\alpha}), \quad (30)$$

¹¹Por ejemplo, Moloche (2012) asume que las comisiones ahorradas de las comisiones por flujo con respecto a la de saldo se depositan en una cuenta de ahorros con características distintas e independientes al fondo de pensiones.

entonces a partir de (12) y la Proposición 2.2, el valor esperado y la varianza de $\widetilde{W}_s(T)$ vienen dados por

$$\mathbb{E}[\widetilde{W}_s(T)] = e^\nu \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)], \quad (31)$$

$$\text{Var}(\widetilde{W}_s(T)) = e^{2\nu} \text{Var}(\widehat{W}_s(T)). \quad (32)$$

Asimismo, como $\widetilde{W}_f(T) = \widehat{W}(T)$, el valor esperado y la varianza de $\widetilde{W}_f(T)$ vienen dados por (26) y (27), respectivamente.

3. Aplicación de la metodología al Sistema Privado de Pensiones del Perú

En esta sección se presenta la aplicación de la metodología propuesta al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP). Esta aplicación es relevante debido a que el SPP está atravesando un proceso importante de reforma después de 20 años de ser creado¹². Parte de la reforma consiste en el cambio de comisión por flujo a saldo, razón por la cual el presente trabajo de investigación analiza el efecto de ciertas variables en la comparación de dichas comisiones.

3.1. Parámetros del modelo

Para las aplicaciones numéricas, se han considerado una edad de jubilación de 65 años, la estructura actual de comisiones por flujo del SPP, la tasa de crecimiento real de los salarios, y tres escenarios (procesos) para el valor cuota, V , del fondo; esos escenarios son: conservador, moderado y agresivo, los cuales corresponden a los fondos de riesgo bajo, medio y alto del SPP, respectivamente.

3.1.1. Calibración del GBM del valor cuota

En el SPP, a través de la Ley No.27988 (publicada en Junio de 2003 y que entró en vigencia en Octubre de 2005), se aumentaron a tres los tipos de fondos que las AFP pueden ofrecer a sus afiliados, con el fin de administrar

¹²La Ley No.29903 contiene los principales aspectos de la reforma. Uno de ellos es que los afiliados migrarán a una comisión mixta, la cual tiene un componente por flujo transitorio decreciente de 10 años, y a partir del décimo año el cargo será únicamente por saldo. La reforma también incluye el mecanismos de subasta de las nuevas cuentas individuales de capitalización, y normas para incorporar a trabajadores independientes.

sus aportes obligatorios. Dichos fondos son: Tipo 1 (conservador y destinado a la preservación de capital), Tipo 2 (moderado y equivalente al fondo único previo a la introducción de los multifondos) y Tipo 3 (agresivo y que tiene como finalidad buscar un rendimiento a largo plazo por encima del promedio).

Para implementar la metodología descrita en el presente artículo, es necesario calcular los parámetros μ y σ del proceso estocástico del valor cuota del fondo descrito por la EDE (1). Tal como se mencionó anteriormente, se propone trabajar con tres escenarios para el GBM del valor cuota, donde cada escenario corresponde a alguno de los tres fondos existentes en el SPP. Es importante mencionar que un afiliado del SPP puede cambiar de fondo, siempre y cuando después de los 60 años de edad se mantenga en el fondo Tipo 1, y este último hecho haya sido incorporado en las aplicaciones numéricas.

En Moloche (2012) se utilizan rendimientos históricos de los multifondos del SPP para calibrar los portafolios miméticos según los activos considerados en su investigación. A su vez, en el presente trabajo se emplean rendimientos logarítmicos históricos corregidos por inflación para estimar las volatilidades de los respectivos GBMs¹³. Para el escenario moderado (fondo Tipo 2), la volatilidad mensual de los rendimientos del valor cuota bajo un GBM es $\sigma_M = 2,643\%$, mientras que, para los escenarios agresivo (fondo Tipo 3) y conservador (fondo Tipo 1), las volatilidades mensuales calibradas fueron $\sigma_A = 4,374\%$ y $\sigma_C = 0,943\%$, respectivamente. Debido a la corta historia de los rendimientos de los fondos del SPP, es de esperar que los “drifts” calibrados tengan un alto error de estimación. Por este motivo, y siguiendo las justificaciones del Anexo Técnico No. 2 de SBS (2013), se asume un rendimiento anual real para el escenario moderado igual a 5.0 % anual (el rendimiento histórico real del fondo Tipo 2 es aproximadamente 6.0 % anual). Por teoría del GBM, se verifica que $\mu_M = r_M + 0,5\sigma_M^2$, donde r_M es el rendimiento esperado mensual en tiempo continuo del fondo Tipo 2. Después de las transformaciones adecuadas, se obtiene $\mu_M = 0,004415$. Para el caso de los escenarios agresivo y conservador consideramos que el “market price of risk” es constante en todos los escenarios, i.e., $\frac{\mu_i - r}{\sigma_i} = k$ para $i = M, A, C$, donde r es la tasa de interés mensual libre de riesgo ajustada por inflación

¹³Las series de rendimientos históricos del valor cuota utilizadas corresponden a AFP Integra debido a que constituye un “benchmark” adecuado para el SPP; además, fue la única AFP que se mantuvo (o no se fusionó) desde el inicio de las observaciones históricas disponibles. Los valores cuota diarios de los fondos Tipo 1 y Tipo 3 considerados para la calibración corresponden al periodo comprendido del 9/12/2005 al 30/04/2014. En el caso del fondo Tipo 2, se consideran observaciones del valor cuota del 02/01/2001 al 30/04/2014.

y expresada en tiempo continuo¹⁴. Como $r = 0,03655\%$ y $k = 0,1532$, entonces es posible estimar tanto μ_A como μ_C . Después de realizar los cálculos respectivos, se tiene $\mu_A = 0,007069$ y $\mu_C = 0,001811$, los cuales corresponden a rendimientos reales aproximados de 7.3% (fondo Tipo 3) y 2.2% (fondo Tipo 1) anual.

3.1.2. Comisión por flujo

Se ha fijado un nivel de comisión por flujo (expresado como porcentaje del salario del afiliado): $f_{pro} = 1,58\%$; éste corresponde al cargo promedio por flujo del SPP al 16 de Mayo de 2014. Como los trabajadores dependientes en el Perú están sujetos a una contribución obligatoria de 10% del salario y f_{pro} se aplica sobre este último, tenemos $\alpha_{pro} = -\ln(1 - 10f_{pro})$, con lo cual $\alpha_{pro} = 0,172$.

3.1.3. Crecimiento real de los salarios

Esta parte se basa enteramente en SBS (2013). Estudios empíricos y teóricos en economía laboral indican que la tasa de crecimiento del salario real es explicada en su mayoría por el nivel de productividad del trabajador (Mincer (1974) y Ashenfelter (2012)); además, que las ganancias en productividad están asociadas con el nivel de educación y la experiencia laboral. Para la economía peruana, Castro y Yamada (2010) muestran evidencia empírica de diferencias salariales explicadas por género y edad.

La tasa de crecimiento del salario real a lo largo de la curva de salario de los afiliados al SPP se determinó utilizando los correspondientes salarios implícitos (contribuciones sobre tasa de contribución obligatoria) entre Junio de 2010 y Setiembre de 2012 (10 trimestres). Los afiliados fueron clasificados en base a su género y nivel educativo: universitario y no universitario; se calculó el correspondiente salario promedio por rango de edad a soles de Setiembre de 2012. La Tabla 1 muestra los porcentajes de crecimiento real como función de las diferentes combinaciones género/educación y un rango de edad de 5 años.

¹⁴El parámetro r se estima a través de los rendimientos de los bonos VAC Soberanos a 90 días, debido a la ausencia de observaciones de 30 días. La serie de datos consta de observaciones diarias de la tasa a 90 días del periodo 20/12/2005 al 16/05/2014.

Tabla 1: Porcentaje anual de crecimiento real de los salarios del SPP

Edad	Mujer		Hombre	
	Sin universidad	Universidad	Sin universidad	Universidad
18 - 22	2.33 %	3.26 %	2.03 %	3.90 %
23 - 27	1.44 %	2.05 %	1.12 %	3.06 %
28 - 32	0.71 %	1.26 %	0.51 %	2.35 %
33 - 37	0.56 %	0.98 %	0.30 %	1.89 %
38 - 42	0.46 %	1.10 %	0.23 %	1.66 %
43 - 47	0.35 %	1.46 %	0.21 %	1.66 %
48 - 52	0.22 %	1.22 %	0.17 %	1.48 %
53 - 57	0.09 %	0.71 %	0.11 %	1.16 %
58 - 64	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %

Fuente: Base de datos trimestral del SPP Junio 2010-Setiembre 2012

Elaboración: El autor en base SBS (2013)

El impacto de la productividad en el crecimiento del salario real se estimó utilizando la Encuesta Permanente de Empleo (EPE) entre los años 2003 y 2012. La variación anual de los salarios reales fue determinada para las mismas combinaciones de género/educación. Los valores para mujeres y hombres sin educación superior fueron 2.73 % y 3.52 % por año, respectivamente. Por otro lado, las variaciones fueron 1.69 % y 0.63 % por año para mujeres y hombres con educación superior, respectivamente. Es importante considerar que la tasa de crecimiento por ganancia de productividad no debería ser constante en el tiempo. Con ello, los cambios porcentuales presentados son considerados para los primeros 10 años; después de 20, años se asume que las ganancias en productividad convergen a 1.00 % (valor de largo plazo); finalmente, para los años del 11 al 20, se considera el promedio entre las ganancias actuales de productividad y las correspondientes de largo plazo. La Tabla 2 resume la información del crecimiento del salario real debido al incremento en la productividad.

Tabla 2: Incrementos porcentuales anuales en salarios reales debido a ganancia en productividad para diferentes combinaciones de género/educación. Se incluye abreviación de dichos perfiles.

Género / Educación	Abreviación	Periodo		
		1-10 años	11-20 años	21 a más
Mujer / Sin universidad	<i>M/SU</i>	2.73 %	1.87 %	1.00 %
Mujer / Universidad	<i>M/U</i>	1.69 %	1.35 %	1.00 %
Hombre / Sin universidad	<i>H/SU</i>	3.52 %	2.26 %	1.00 %
Hombre / Universidad	<i>H/U</i>	0.63 %	0.82 %	1.00 %

Fuente: Encuesta Permanente de Empleo 2003-2012 (sólo primera columna)

La tasa de crecimiento del salario real (anualizada) es la suma del crecimiento correspondiente a lo largo de la curva de salario más el componente

de ganancia por incremento de productividad. Por ejemplo, una mujer de 23 años, con estudios universitarios, tendrá un crecimiento real del salario igual a 3.74 % por año (2.05 % de la curva de salario más 1.69 % por productividad) hasta que llegue a los 27 años. De los 28 a los 32 años de edad, la tasa de crecimiento real será de 2.95 % (1.26 % de la curva de salario más 1.69 % por productividad). Adicionalmente, de los 33 a los 37 años la tasa de crecimiento será de 2.33 % (0.98 % de la curva de salario más 1.35 % por productividad). Es preciso notar que el cambio de la ganancia por productividad, después de 10 años, va de 1.69 % a 1.35 %. Se puede continuar de la misma forma hasta que se determinan las tasas de crecimiento durante toda la fase de acumulación. Finalmente, las tasas de crecimiento anuales son transformadas a tasas mensuales, τ , con lo cual la sucesión mensual de contribuciones \mathcal{W}_T será tal que $W_{i+1} = (1 + \tau_i)W_i$ para $i \geq 0$ y $W_0 > 0$ arbitrario.

3.1.4. Interrupción de aportes

A pesar que sus supuestos de independencia son fuertes, el proceso de interrupción Z es suficientemente flexible debido a que la secuencia de probabilidades p_i puede reflejar diferentes perfiles de contribución y circunstancias de los afiliados. La Tabla 3 muestra la densidad de cotización para diferentes edades de los afiliados. La secuencia de probabilidades de contribución $\mathcal{P}_T = \{p_i \mid p_i \in [0, 1], 0 \leq i \leq T - 1\}$ de la Sección 2.3 se ha derivado de la tabla antes mencionada. Por ejemplo, si un afiliado empieza a aportar cuando cumple 31 años de edad, entonces $T = 31 \times 12 = 372$ meses, entonces para $i = 0, \dots, 59$ hacemos $p_i = 0,46$, luego para $i = 60, \dots, 119$ hacemos $p_i = 0,451$ y así sucesivamente.

Tabla 3: Densidad de cotización por grupo de edad.

Grupo de edad	Densidad de cotización (%)
< 21	44.6
21 - 25	46.8
26 - 30	46.0
31 - 35	46.0
36 - 40	45.1
41 - 45	46.0
46 - 50	48.0
51 - 55	48.2
56 - 60	47.5
61 - 65	40.0
Promedio	45.8

Fuente: Elaboración propia, en base a SBS (2013).

3.2. Valor esperado de riqueza terminal

En esta sección, analizaremos el efecto de las contribuciones, comisiones y rentabilidad en el valor esperado de la riqueza terminal de la CIC de un afiliado del Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP).

3.2.1. Ratios de análisis

Para el análisis respectivo, es necesario definir las siguientes esperanzas:

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_A(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Z_i W_i] = \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i, \quad (33)$$

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_L(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbb{E}[Z_i W_i e^{r(T-i)}] = \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i e^{r(T-i)}, \quad (34)$$

donde r es la tasa de interés real mensual libre de riesgo expresada en tiempo continuo determinada en la Sección 3.1.1. La esperanza $\mathbb{E}[\widehat{W}_A(T)]$ en (33) representa la suma de las contribuciones esperadas del afiliado durante la fase de acumulación de la CIC. Asimismo, la esperanza $\mathbb{E}[\widehat{W}_L(T)]$ en (34) representa la riqueza esperada terminal en la CIC del afiliado en ausencia de comisiones, y considerando un rendimiento mensual real libre de riesgo igual a r .

Se introducen los siguientes ratios para evaluar el efecto de la rentabilidad del fondo y las comisiones de administración en la riqueza esperada terminal de la CIC del afiliado:

$$\theta_{AP} = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_A(T)]}{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]}, \quad (35)$$

$$\theta_{LR} = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_L(T)]}{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]}, \quad (36)$$

$$\theta_{CS} = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]}{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]}, \quad (37)$$

$$\theta_{CF} = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)]}{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]}, \quad (38)$$

donde $\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]$, $\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)]$ y $\mathbb{E}[\widehat{W}_f(T)]$ vienen dados por (26), (12) y (13), respectivamente. El ratio θ_{AP} en (35) denota la fracción de riqueza terminal explicada únicamente por la suma de las contribuciones del afiliado; recordar

que $\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]$ es el valor esperado de riqueza terminal en ausencia de comisiones. De manera similar, el ratio θ_{LR} en (36) representa la fracción de la riqueza terminal (en ausencia de comisiones), que se explicaría si las contribuciones se hubieran capitalizado a una tasa de interés libre de riesgo r . El ratio θ_{CS} en (37) divide la riqueza terminal esperada en la CIC bajo comisión por saldo y la riqueza terminal esperada sin comisiones. Es decir que $1 - \theta_{CS}$ representaría la fracción de riqueza terminal perdida debido a la comisión por saldo. El ratio θ_{CF} en (38) es la fracción de riqueza terminal “ajustada” en la CIC bajo comisión por flujo con respecto a la riqueza terminal sin comisiones. Con lo cual, $1 - \theta_{CF}$ representaría la fracción de riqueza terminal perdida al considerar el costo de oportunidad de la comisión por flujo. Es importante notar que, bajo una comisión por flujo constante, α , se verifica que $\theta_{CF} = e^{-\alpha}$. Si para algún escenario se tiene $\theta_{CS} = \theta_{CF}$, entonces el valor de las comisiones totales por saldo igualaría al costo de oportunidad total de las comisiones por flujo.

Si bien los ratios θ_{CS} y θ_{CF} nos permiten comparar las comisiones por flujo y saldo, también tenemos que

$$\theta_{\nu} = \frac{\mathbb{E}[\widetilde{W}_s(T)]}{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]}, \quad (39)$$

donde $\mathbb{E}[\widetilde{W}_s(T)]$ definido en (31) representa riqueza terminal del afiliado bajo comisión por saldo si las comisiones por flujo “ahorradas” se reinvierten en la CIC (ver Sección 2.6 para mayor detalle). Asimismo, $\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]$ representa la riqueza terminal esperada bajo comisión por flujo. Con lo cual, si $\theta_{\nu} > 1$, la comisión por saldo sería preferible para el afiliado, y si $\theta_{\nu} < 1$, la comisión por flujo sería preferible. Notar que bajo esta forma de comparación se está asumiendo indiferencia al riesgo por parte del afiliado. Finalmente, se presenta el siguiente ratio:

$$\theta_{NI} = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)]}{\mathbb{E}[W(T)]}, \quad (40)$$

donde $\mathbb{E}[W(T)]$ representa la riqueza terminal esperada sin interrupciones ni comisiones. El ratio θ_{NI} nos brinda información sobre la fracción en la cual se reduce el fondo final (sin comisiones) al existir interrupciones en la secuencia de aportes.

3.2.2. Resultados numéricos

La Tabla 4 muestra resultados para los ratios (en porcentaje) de la Sección 3.2.1, al considerar los escenarios moderado, agresivo y conservador,

explicados en la Sección 3.1.1. Se asume un nivel de comisión por saldo igual a $\delta = 1,00\%$ anual y un nivel de comisión por flujo igual a $\alpha = 0,172$ (corresponde al promedio SPP y se explica en detalle en la Sección 3.1.2). Asimismo, se reportan resultados para diferentes valores de T en años, donde esta variable representa la duración de la fase de acumulación. Se ha asumido también un perfil de contribuciones M/SU debido a que los otros perfiles de la Tabla 2 generan resultados similares. La densidad de cotización se determina a partir de la Tabla 3, y se considera además que, a partir de los 60 años, el afiliado pasa por defecto al fondo conservador hasta su jubilación, la cual ocurre cuando cumple 65 años. Las Tablas 5 y 6 muestran los mismos resultados de la Tabla 4, pero bajo comisiones por saldo iguales a $0,5\%$ y $1,5\%$ anual, respectivamente.

Por ejemplo, si en la Tabla 4 fijamos $T = 45$ años (corresponde a un afiliado que empieza a cotizar a los 20 años de edad) y un escenario moderado de rentabilidad, entonces tenemos $\theta_{AP} = 33\%$ y $\theta_{LR} = 36\%$. En el caso de θ_{AP} , si no hubieran comisiones de administración, el 33% de la riqueza terminal correspondería a la suma de los aportes realizados, y el 67% restante, a las ganancias generadas por la rentabilidad de dichos aportes. En el caso de θ_{LR} , si consideramos una rentabilidad igual a la tasa libre de riesgo, la riqueza terminal sólo sería 36% de la que se hubiera obtenido bajo un escenario de rentabilidad moderada. Para el mismo afiliado tenemos $\theta_{CS} = 76,4\%$, lo cual implica que una comisión por saldo de $1,0\%$ anual causaría una reducción de riqueza terminal esperada del orden del $23,6\%$. Cuando la rentabilidad es de $7,3\%$ real anual (escenario agresivo), la reducción sería de $26,7\%$ ($\theta_{CS} = 73,3\%$ cuando $T = 45$), y considerando una rentabilidad de $2,2\%$ real anual (escenario moderado), la reducción debido a la comisión por saldo sería $19,9\%$ ($\theta_{CS} = 80,1\%$ cuando $T = 45$).

Como $\alpha = 0,172$, se tiene que $\theta_{CF} = e^{-\alpha} = 84,2\%$; entonces el costo de oportunidad de las comisiones por flujo sería $15,8\%$ de la riqueza terminal en ausencia de comisiones, y este resultado es común para todas las Tablas 4, 5 y 6. Para ilustrar los resultados de la comparación de comisiones nos seguiremos refiriendo a la Tabla 4. Notar que $\theta_{CS} = \theta_{CF}$ para $T \approx 30$ años bajo el escenario moderado. Lo anterior implica que la pérdida total por una comisión por saldo de $1,00\%$ iguala al costo de oportunidad de la comisión por flujo, cuando el afiliado empieza a aportar a los 35 años y se decide por el fondo de riesgo medio. Notar además que $\theta_{\nu} = 1$ cuando $T \approx 26$ años, lo cual implica que si un afiliado, a partir de los 39 años, invierte sus aportes más los aportes ahorrados con respecto a la comisión por flujo en el fondo moderado bajo comisión por saldo, entonces ambos esquemas generarían la misma riqueza esperada al momento de su jubilación. En los escenarios agresivo y conservador se

Tabla 4: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} , θ_{CS} , θ_{CF} , θ_{ν} y θ_{NI} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,00\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último).

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)					Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)					Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)							
	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}
5	94.7	95.7	97.5	84.2	112.9	40.1	94.7	95.7	97.5	84.2	112.9	40.1	94.7	95.7	97.5	84.2	112.9	40.1
7	91.4	92.9	96.4	84.2	111.7	42.3	90.3	91.8	96.4	84.2	111.6	42.3	92.5	93.9	96.5	84.2	111.7	42.2
9	87.5	89.3	95.4	84.2	110.4	43.5	84.5	86.2	95.3	84.2	110.3	43.6	90.4	92.3	95.5	84.2	110.5	43.4
11	83.5	85.5	94.3	84.2	109.2	44.3	78.3	80.2	94.1	84.2	109.0	44.5	88.5	90.7	94.5	84.2	109.4	44.2
13	79.4	81.7	93.3	84.2	108.0	45.0	72.1	74.2	93.0	84.2	107.7	45.3	86.6	89.1	93.6	84.2	108.3	44.8
15	75.5	78.0	92.2	84.2	106.8	45.5	66.2	68.4	91.8	84.2	106.3	45.8	84.8	87.6	92.6	84.2	107.3	45.2
17	71.6	74.3	91.2	84.2	105.6	45.9	60.6	62.9	90.6	84.2	105.0	46.2	83.1	86.2	91.7	84.2	106.2	45.6
19	68.0	70.8	90.1	84.2	104.4	46.2	55.3	57.6	89.4	84.2	103.6	46.5	81.4	84.7	90.8	84.2	105.2	45.8
21	64.5	67.4	89.1	84.2	103.2	46.3	50.5	52.8	88.3	84.2	102.2	46.6	79.8	83.4	90.0	84.2	104.2	46.0
23	61.2	64.2	88.1	84.2	102.0	46.3	46.1	48.4	87.1	84.2	100.8	46.5	78.2	82.0	89.1	84.2	103.2	46.0
25	58.0	61.1	87.1	84.2	100.8	46.3	41.9	44.2	85.9	84.2	99.4	46.5	76.6	80.7	88.3	84.2	102.2	46.0
27	55.0	58.2	86.0	84.2	99.6	46.2	38.1	40.3	84.6	84.2	98.0	46.3	75.1	79.4	87.4	84.2	101.3	46.0
29	52.1	55.3	85.0	84.2	98.4	46.1	34.6	36.7	83.4	84.2	96.6	46.1	73.7	78.2	86.6	84.2	100.3	45.9
31	49.3	52.5	83.9	84.2	97.2	46.0	31.2	33.3	82.1	84.2	95.1	46.1	72.2	76.9	85.8	84.2	99.3	45.9
33	46.5	49.7	82.8	84.2	95.9	46.0	28.2	30.1	80.9	84.2	93.6	46.1	70.7	75.6	84.9	84.2	98.3	45.9
35	43.9	47.1	81.8	84.2	94.7	46.0	25.4	27.2	79.6	84.2	92.2	46.0	69.3	74.4	84.1	84.2	97.4	45.9
37	41.5	44.7	80.7	84.2	93.4	46.0	22.8	24.6	78.3	84.2	90.7	46.0	67.9	73.2	83.3	84.2	96.4	45.9
39	39.1	42.3	79.6	84.2	92.2	46.0	20.5	22.2	77.0	84.2	89.2	46.0	66.6	72.0	82.4	84.2	95.5	45.9
41	36.9	40.1	78.5	84.2	90.9	46.0	18.4	20.0	75.8	84.2	87.8	46.1	65.3	70.8	81.6	84.2	94.5	46.0
43	34.9	37.9	77.5	84.2	89.7	46.1	16.5	18.0	74.5	84.2	86.3	46.2	64.0	69.7	80.8	84.2	93.6	46.0
45	33.0	36.0	76.4	84.2	88.5	46.1	14.9	16.3	73.3	84.2	84.9	46.1	62.8	68.6	80.1	84.2	92.7	46.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} , θ_{CS} , θ_{CF} , θ_{ν} y θ_{NI} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 0,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último).

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}
5	94.7	95.7	98.7	84.2	114.3	40.1	94.7	95.7	98.7	84.2	114.3	40.1	94.7	95.7	98.7	84.2	114.3	40.1
7	91.4	92.9	98.2	84.2	113.7	42.3	90.3	91.8	98.2	84.2	113.7	42.3	92.5	93.9	98.2	84.2	113.7	42.2
9	87.5	89.3	97.6	84.2	113.1	43.5	84.5	86.2	97.6	84.2	113.0	43.6	90.4	92.3	97.7	84.2	113.1	43.4
11	83.5	85.5	97.1	84.2	112.4	44.3	78.3	80.2	97.0	84.2	112.3	44.5	88.5	90.7	97.2	84.2	112.6	44.2
13	79.4	81.7	96.6	84.2	111.8	45.0	72.1	74.2	96.4	84.2	111.6	45.3	86.6	89.1	96.7	84.2	112.0	44.8
15	75.5	78.0	96.0	84.2	111.2	45.5	66.2	68.4	95.8	84.2	110.9	45.8	84.8	87.6	96.2	84.2	111.4	45.2
17	71.6	74.3	95.5	84.2	110.5	45.9	60.6	62.9	95.2	84.2	110.2	46.2	83.1	86.2	95.7	84.2	110.9	45.6
19	68.0	70.8	94.9	84.2	109.9	46.2	55.3	57.6	94.5	84.2	109.5	46.5	81.4	84.7	95.3	84.2	110.3	45.8
21	64.5	67.4	94.4	84.2	109.3	46.3	50.5	52.8	93.9	84.2	108.7	46.6	79.8	83.4	94.8	84.2	109.8	46.0
23	61.2	64.2	93.8	84.2	108.6	46.3	46.1	48.4	93.3	84.2	108.0	46.5	78.2	82.0	94.3	84.2	109.3	46.0
25	58.0	61.1	93.2	84.2	108.0	46.3	41.9	44.2	92.6	84.2	107.2	46.5	76.6	80.7	93.9	84.2	108.7	46.0
27	55.0	58.2	92.7	84.2	107.3	46.2	38.1	40.3	91.9	84.2	106.4	46.3	75.1	79.4	93.4	84.2	108.2	46.0
29	52.1	55.3	92.1	84.2	106.6	46.1	34.6	36.7	91.2	84.2	105.7	46.1	73.7	78.2	93.0	84.2	107.7	45.9
31	49.3	52.5	91.5	84.2	106.0	46.0	31.2	33.3	90.5	84.2	104.8	46.1	72.2	76.9	92.5	84.2	107.1	45.9
33	46.5	49.7	90.9	84.2	105.3	46.0	28.2	30.1	89.8	84.2	104.0	46.1	70.7	75.6	92.0	84.2	106.6	45.9
35	43.9	47.1	90.3	84.2	104.6	46.0	25.4	27.2	89.1	84.2	103.2	46.0	69.3	74.4	91.6	84.2	106.0	45.9
37	41.5	44.7	89.7	84.2	103.9	46.0	22.8	24.6	88.4	84.2	102.3	46.0	67.9	73.2	91.1	84.2	105.5	45.9
39	39.1	42.3	89.1	84.2	103.1	46.0	20.5	22.2	87.6	84.2	101.5	46.0	66.6	72.0	90.6	84.2	105.0	45.9
41	36.9	40.1	88.5	84.2	102.4	46.0	18.4	20.0	86.9	84.2	100.6	46.1	65.3	70.8	90.2	84.2	104.4	46.0
43	34.9	37.9	87.8	84.2	101.7	46.1	16.5	18.0	86.2	84.2	99.8	46.2	64.0	69.7	89.7	84.2	103.9	46.0
45	33.0	36.0	87.3	84.2	101.0	46.1	14.9	16.3	85.5	84.2	99.0	46.1	62.8	68.6	89.3	84.2	103.4	46.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} , θ_{CS} , θ_{CF} , θ_{ν} y θ_{NI} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a $1,58\%$ del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último).

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{ν}	θ_{NI}
5	94.7	95.7	96.3	84.2	111.5	40.1	94.7	95.7	96.3	84.2	111.5	40.1	94.7	95.7	96.3	84.2	111.5	40.1
7	91.4	92.9	94.7	84.2	109.7	42.3	90.3	91.8	94.7	84.2	109.6	42.3	92.5	93.9	94.7	84.2	109.7	42.2
9	87.5	89.3	93.2	84.2	107.9	43.5	84.5	86.2	93.0	84.2	107.7	43.6	90.4	92.3	93.3	84.2	108.0	43.4
11	83.5	85.5	91.7	84.2	106.1	44.3	78.3	80.2	91.4	84.2	105.8	44.5	88.5	90.7	91.9	84.2	106.4	44.2
13	79.4	81.7	90.2	84.2	104.4	45.0	72.1	74.2	89.7	84.2	103.9	45.3	86.6	89.1	90.6	84.2	104.9	44.8
15	75.5	78.0	88.7	84.2	102.7	45.5	66.2	68.4	88.1	84.2	102.0	45.8	84.8	87.6	89.2	84.2	103.3	45.2
17	71.6	74.3	87.2	84.2	101.0	45.9	60.6	62.9	86.4	84.2	100.0	46.2	83.1	86.2	88.0	84.2	101.8	45.6
19	68.0	70.8	85.7	84.2	99.2	46.2	55.3	57.6	84.7	84.2	98.1	46.5	81.4	84.7	86.7	84.2	100.4	45.8
21	64.5	67.4	84.3	84.2	97.6	46.3	50.5	52.8	83.1	84.2	96.2	46.6	79.8	83.4	85.5	84.2	99.0	46.0
23	61.2	64.2	82.8	84.2	95.9	46.3	46.1	48.4	81.4	84.2	94.3	46.5	78.2	82.0	84.3	84.2	97.6	46.0
25	58.0	61.1	81.4	84.2	94.3	46.3	41.9	44.2	79.7	84.2	92.3	46.5	76.6	80.7	83.1	84.2	96.2	46.0
27	55.0	58.2	80.0	84.2	92.6	46.2	38.1	40.3	78.1	84.2	90.4	46.3	75.1	79.4	82.0	84.2	94.9	46.0
29	52.1	55.3	78.6	84.2	91.0	46.1	34.6	36.7	76.4	84.2	88.4	46.1	73.7	78.2	80.8	84.2	93.6	45.9
31	49.3	52.5	77.1	84.2	89.3	46.0	31.2	33.3	74.7	84.2	86.5	46.1	72.2	76.9	79.7	84.2	92.3	45.9
33	46.5	49.7	75.7	84.2	87.6	46.0	28.2	30.1	73.0	84.2	84.5	46.1	70.7	75.6	78.5	84.2	90.9	45.9
35	43.9	47.1	74.2	84.2	85.9	46.0	25.4	27.2	71.3	84.2	82.5	46.0	69.3	74.4	77.4	84.2	89.6	45.9
37	41.5	44.7	72.8	84.2	84.3	46.0	22.8	24.6	69.6	84.2	80.6	46.0	67.9	73.2	76.3	84.2	88.4	45.9
39	39.1	42.3	71.4	84.2	82.6	46.0	20.5	22.2	67.9	84.2	78.7	46.0	66.6	72.0	75.2	84.2	87.1	45.9
41	36.9	40.1	70.0	84.2	81.0	46.0	18.4	20.0	66.3	84.2	76.8	46.1	65.3	70.8	74.2	84.2	85.9	46.0
43	34.9	37.9	68.6	84.2	79.4	46.1	16.5	18.0	64.7	84.2	74.9	46.2	64.0	69.7	73.1	84.2	84.7	46.0
45	33.0	36.0	67.3	84.2	77.9	46.1	14.9	16.3	63.1	84.2	73.1	46.1	62.8	68.6	72.1	84.2	83.5	46.0

Fuente: Elaboración propia

obtiene $\theta_\nu = 1$ cuando $T \approx 24$ y $T \approx 30$ años, respectivamente. Entonces, mayores rentabilidades favorecen a la comisión por flujo con respecto a su par por saldo, debido a que se necesitan fases de acumulación más cortas para alcanzar la indiferencia. Las Figuras 1, 2, 3 muestran los ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} para los escenarios moderado, agresivo y conservador cuando $\delta = 1,00\%$ anual, i.e., las figuras muestran parcialmente la información de la Tabla 4. En tales figuras se puede apreciar el comportamiento de los ratios en función de T , y se observa claramente cómo las ganancias de capital se vuelven más relevantes y la suma de aportes menos relevante a medida que aumentan tanto la fase de acumulación como la rentabilidad. Observamos además que las pérdidas por comisión por saldo, $1 - \theta_{CS}$, son similares entre sí, mientras que $1 - \theta_{LR}$ y $\theta_{CS} - \theta_{LR}$ difieren significativamente de escenario a escenario.

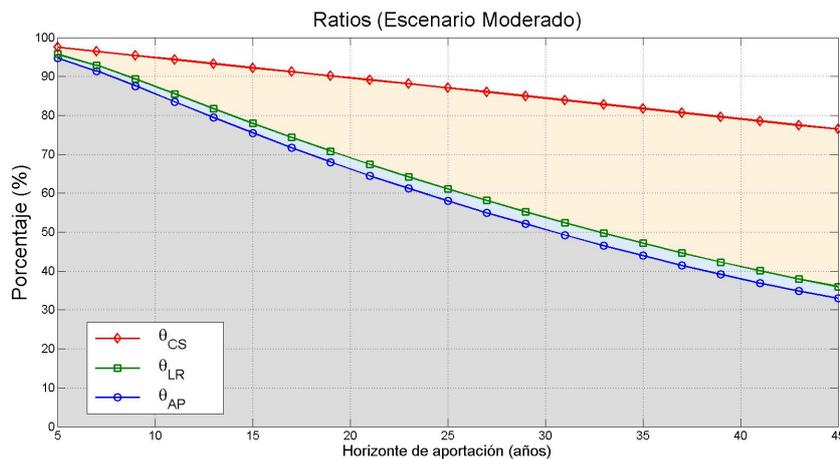


Figura 1: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario moderado (rentabilidad $r_M = 5,00\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

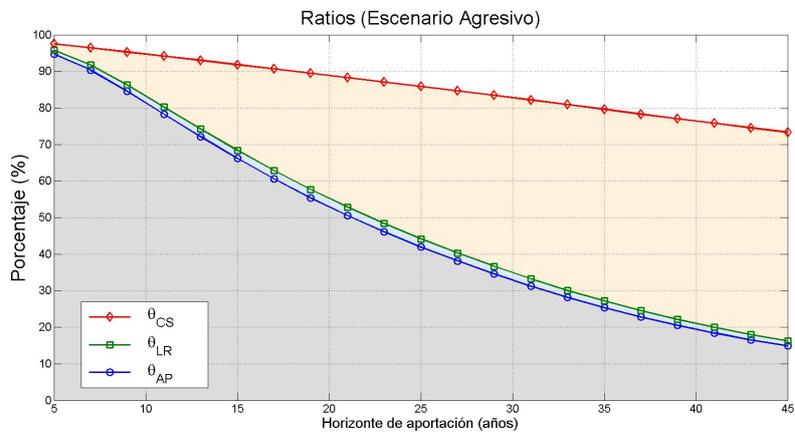


Figura 2: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario agresivo (rentabilidad $r_A = 7,30\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.
Fuente: Elaboración propia

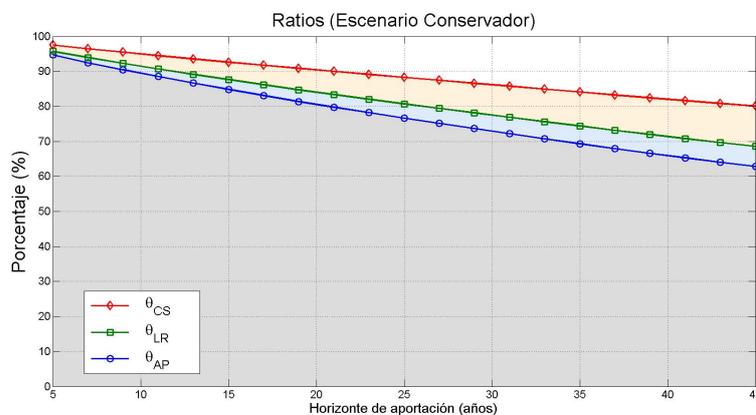


Figura 3: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario conservador (rentabilidad $r_C = 2,20\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.
Fuente: Elaboración propia

A partir de las Tablas 5 y 6, podemos analizar el comportamiento de los ratios de la Sección 3.2.1 cuando $\delta = 0,5\%$ y $\delta = 1,5\%$ anual, respectivamente. Vemos que si $\delta = 0,5\%$ y $T = 45$ años, entonces las pérdidas por el cargo por saldo son 12.7%, 14.5% y 10.4% del fondo para los escenarios moderado, agresivo y conservador, respectivamente. Para el mismo horizonte, pero

cuando $\delta = 1,5\%$, las fracciones del fondo “consumidas” por la comisión por saldo serían 32.7%, 36.9% y 27.9%, en los escenarios moderado, agresivo y conservador respectivamente. La Tabla 7, a manera de resumen, contiene los valores de $1 - \theta_{CS}$, i.e., la pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, para los perfiles de aporte de la Tabla 2 (incluyendo además el caso de aportes reales iguales), y los escenarios de rentabilidad real del fondo, pero considerando una comisión por saldo de 1.00% anual. Las Tablas 8 y 9 contienen la misma información para $\delta = 0,5\%$ y $\delta = 1,5\%$ anual, respectivamente. A partir de la información contenida en las tablas, notamos que los diferentes perfiles (sin E) producen prácticamente los mismos resultado; pero el perfil E produce pérdidas adicionales, las cuales se reducen a medida que disminuye el tamaño de la fase de acumulación. Finalmente, si consideramos el caso de aportes ininterrumpidos, i.e., $p_i = 1$ para todo i , los valores de los ratios son prácticamente los mismos, con la excepción de θ_{NI} que sería igual a uno. Esto quiere decir que una densidad de cotización generada por la Tabla 3 no produce diferencias significativas en los ratios de riqueza terminal esperada.

3.3. Varianza de riqueza terminal

En esta sección, se analiza el efecto de la rentabilidad, la densidad de cotización y las comisiones de administración en la varianza de riqueza terminal de la CIC de afiliado.

3.3.1. Ratios de análisis

Para lograr el objetivo de esta sección, se introducen los siguientes ratios:

$$\Sigma_{CS} = \frac{\text{Var}(\widehat{W}_s(T))}{\text{Var}(\widehat{W}(T))}, \quad (41)$$

$$\Sigma_{\nu} = \frac{\text{Var}(\widetilde{W}_s(T))}{\text{Var}(\widehat{W}(T))}, \quad (42)$$

$$\Sigma_{NI} = \frac{\text{Var}(\widehat{W}(T))}{\text{Var}(W(T))}, \quad (43)$$

donde $\text{Var}(\widehat{W}_s(T))$, $\text{Var}(\widehat{W}(T))$ y $\text{Var}(\widetilde{W}_s(T))$ se definieron en (14), (27) y (32), respectivamente. Asimismo, recordar que $W(T)$ es la riqueza terminal sin comisiones ni interrupciones. El ratio Σ_{CS} en (41) representa la varianza de la riqueza terminal bajo comisión por saldo dividida por la varianza de

Tabla 7: Pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, $1 - \theta_{cs}$, con θ_{cs} definido en (37) cuando $\delta = 1,00\%$ anual. Se han considerado diferentes horizontes de aportación en años (T), los escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1, y los perfiles de aportes de la Tabla 15 (además de el perfil E que consiste en aportes reales iguales). La densidad de cotización está determinada por la Tabla 16

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)				Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)				Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)						
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
7	3.6	3.6	3.5	3.7	3.7	3.6	3.7	3.6	3.7	3.7	3.5	3.6	3.5	3.6	3.7
9	4.6	4.7	4.6	4.8	4.8	4.7	4.8	4.7	4.8	4.9	4.5	4.6	4.5	4.7	4.7
11	5.7	5.7	5.6	5.8	5.9	5.9	5.9	5.8	6.0	6.1	5.5	5.6	5.4	5.7	5.7
13	6.7	6.8	6.6	6.9	7.1	7.0	7.1	6.9	7.2	7.4	6.4	6.5	6.3	6.6	6.8
15	7.8	7.9	7.7	8.0	8.2	8.2	8.3	8.1	8.4	8.6	7.4	7.5	7.3	7.6	7.8
17	8.8	8.9	8.7	9.0	9.3	9.4	9.4	9.2	9.6	9.9	8.3	8.3	8.1	8.5	8.8
19	9.9	9.9	9.7	10.1	10.5	10.6	10.6	10.4	10.8	11.2	9.2	9.2	9.0	9.4	9.8
21	10.9	10.9	10.7	11.1	11.6	11.7	11.8	11.6	11.9	12.5	10.0	10.1	9.9	10.2	10.8
23	11.9	11.9	11.7	12.1	12.8	12.9	12.9	12.8	13.1	13.7	10.9	10.9	10.7	11.1	11.7
25	12.9	12.9	12.8	13.1	13.9	14.1	14.1	14.0	14.3	15.1	11.7	11.7	11.5	11.9	12.7
27	14.0	13.9	13.8	14.1	15.1	15.4	15.3	15.2	15.5	16.4	12.6	12.5	12.4	12.7	13.7
29	15.0	14.9	14.8	15.1	16.2	16.6	16.5	16.4	16.7	17.7	13.4	13.3	13.2	13.4	14.6
31	16.1	16.0	15.9	16.1	17.4	17.9	17.8	17.7	17.9	19.0	14.2	14.1	14.1	14.2	15.6
33	17.2	17.0	17.0	17.1	18.6	19.1	19.0	19.0	19.1	20.4	15.1	14.9	14.9	15.0	16.6
35	18.2	18.1	18.1	18.1	19.8	20.4	20.3	20.2	20.3	21.8	15.9	15.7	15.8	15.7	17.5
37	19.3	19.1	19.2	19.1	21.0	21.7	21.5	21.5	21.5	23.1	16.7	16.5	16.6	16.4	18.5
39	20.4	20.1	20.3	20.1	22.2	23.0	22.8	22.8	22.7	24.5	17.6	17.2	17.4	17.1	19.5
41	21.5	21.2	21.3	21.0	23.4	24.2	24.0	24.1	23.9	25.9	18.4	18.0	18.3	17.8	20.4
43	22.5	22.2	22.4	22.0	24.7	25.5	25.3	25.4	25.1	27.2	19.2	18.7	19.1	18.5	21.4
45	23.6	23.2	23.5	22.9	25.8	26.7	26.4	26.6	26.2	28.5	19.9	19.4	19.9	19.1	22.4

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8: Pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, $1 - \theta_{CS}$, con θ_{CS} definido en (37) cuando $\delta = 0,5\%$ anual. Se han considerado diferentes horizontes de aportación en años (T), los escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1, y los perfiles de aportes de la Tabla 15 (además de el perfil E que consiste en aportes reales iguales). La densidad de cotización está determinada por la Tabla 16

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)				Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)				Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)						
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
5	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3
7	1.8	1.8	1.8	1.9	1.9	1.8	1.9	1.8	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.9
9	2.4	2.4	2.3	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.5	2.5	2.3	2.3	2.3	2.4	2.4
11	2.9	2.9	2.9	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.1	3.1	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9
13	3.4	3.5	3.4	3.5	3.6	3.6	3.6	3.5	3.7	3.8	3.3	3.3	3.2	3.4	3.5
15	4.0	4.0	3.9	4.1	4.2	4.2	4.3	4.1	4.3	4.4	3.8	3.8	3.7	3.9	4.0
17	4.5	4.6	4.5	4.7	4.8	4.8	4.9	4.8	4.9	5.1	4.3	4.3	4.2	4.4	4.5
19	5.1	5.1	5.0	5.2	5.4	5.5	5.5	5.4	5.6	5.8	4.7	4.8	4.7	4.8	5.1
21	5.6	5.7	5.6	5.8	6.0	6.1	6.1	6.0	6.2	6.5	5.2	5.2	5.1	5.3	5.6
23	6.2	6.2	6.1	6.3	6.7	6.7	6.8	6.7	6.8	7.2	5.7	5.7	5.6	5.7	6.1
25	6.8	6.8	6.7	6.8	7.3	7.4	7.4	7.3	7.5	7.9	6.1	6.1	6.0	6.2	6.6
27	7.3	7.3	7.2	7.4	7.9	8.1	8.0	8.0	8.1	8.6	6.6	6.5	6.5	6.6	7.2
29	7.9	7.9	7.8	7.9	8.6	8.8	8.7	8.7	8.8	9.4	7.0	7.0	6.9	7.0	7.7
31	8.5	8.4	8.4	8.5	9.2	9.5	9.4	9.4	9.5	10.1	7.5	7.4	7.4	7.5	8.2
33	9.1	9.0	9.0	9.1	9.9	10.2	10.1	10.1	10.2	10.9	8.0	7.9	7.9	7.9	8.8
35	9.7	9.6	9.6	9.6	10.6	10.9	10.8	10.8	10.9	11.7	8.4	8.3	8.3	8.3	9.3
37	10.3	10.2	10.2	10.2	11.3	11.6	11.6	11.5	11.6	12.4	8.9	8.7	8.8	8.7	9.9
39	10.9	10.8	10.8	10.7	11.9	12.4	12.3	12.3	12.2	13.2	9.4	9.2	9.3	9.1	10.4
41	11.5	11.4	11.5	11.3	12.7	13.1	13.0	13.0	12.9	14.0	9.8	9.6	9.8	9.5	11.0
43	12.2	12.0	12.1	11.8	13.4	13.8	13.7	13.7	13.6	14.8	10.3	10.0	10.2	9.9	11.5
45	12.7	12.5	12.7	12.4	14.1	14.5	14.4	14.5	14.3	15.6	10.7	10.4	10.7	10.2	12.1

Fuente: Elaboración propia

Tabla 9: Pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, $1 - \theta_{CS}$, con θ_{CS} definido en (37) cuando $\delta = 1,50\%$ anual. Se han considerado diferentes horizontes de aportación en años (T), los escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1., y los perfiles de aportes de la Tabla 15 (además de el perfil E que consiste en aportes reales iguales). La densidad de cotización está determinada por la Tabla 16

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)			Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)			Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)								
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
5	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8	3.7	3.7	3.7	3.8	3.8
7	5.3	5.4	5.2	5.4	5.5	5.3	5.4	5.3	5.5	5.5	5.3	5.3	5.2	5.4	5.4
9	6.8	6.9	6.8	7.0	7.1	7.0	7.1	6.9	7.1	7.2	6.7	6.8	6.6	6.9	6.9
11	8.3	8.4	8.2	8.6	8.7	8.6	8.7	8.5	8.8	9.0	8.1	8.2	8.0	8.3	8.4
13	9.8	10.0	9.7	10.1	10.3	10.3	10.4	10.1	10.5	10.8	9.4	9.6	9.3	9.7	9.9
15	11.3	11.5	11.2	11.6	12.0	11.9	12.1	11.8	12.2	12.5	10.8	10.9	10.6	11.0	11.4
17	12.8	12.9	12.6	13.1	13.6	13.6	13.7	13.4	13.9	14.3	12.0	12.2	11.9	12.3	12.8
19	14.3	14.4	14.1	14.6	15.2	15.3	15.4	15.1	15.6	16.2	13.3	13.4	13.1	13.6	14.2
21	15.7	15.8	15.5	16.0	16.8	16.9	17.0	16.7	17.2	18.0	14.5	14.6	14.3	14.8	15.6
23	17.2	17.2	16.9	17.4	18.4	18.6	18.6	18.4	18.8	19.7	15.7	15.7	15.5	16.0	16.9
25	18.6	18.6	18.3	18.8	19.9	20.3	20.2	20.0	20.5	21.5	16.9	16.8	16.6	17.1	18.2
27	20.0	19.9	19.7	20.2	21.5	21.9	21.9	21.7	22.1	23.3	18.0	17.9	17.8	18.2	19.6
29	21.4	21.3	21.2	21.5	23.1	23.6	23.5	23.4	23.7	25.1	19.2	19.0	18.9	19.2	20.9
31	22.9	22.7	22.6	22.9	24.7	25.3	25.2	25.1	25.4	26.9	20.3	20.1	20.1	20.3	22.2
33	24.3	24.1	24.1	24.2	26.3	27.0	26.9	26.8	27.0	28.8	21.5	21.2	21.2	21.3	23.5
35	25.8	25.5	25.6	25.6	27.9	28.7	28.6	28.5	28.6	30.6	22.6	22.3	22.4	22.3	24.8
37	27.2	26.9	27.0	26.9	29.5	30.4	30.2	30.2	30.2	32.4	23.7	23.3	23.5	23.2	26.1
39	28.6	28.3	28.4	28.2	31.1	32.1	31.9	31.9	31.8	34.1	24.8	24.3	24.6	24.2	27.4
41	30.0	29.6	29.9	29.4	32.7	33.7	33.5	33.5	33.3	35.9	25.8	25.3	25.7	25.1	28.6
43	31.4	31.0	31.3	30.6	34.2	35.3	35.1	35.2	34.8	37.6	26.9	26.3	26.8	25.9	29.9
45	32.7	32.2	32.6	31.8	35.8	36.9	36.6	36.7	36.3	39.3	27.9	27.2	27.8	26.7	31.1

Fuente: Elaboración propia

riqueza terminal asumiendo comisión por flujo. De manera similar, el ratio Σ_ν contrasta las varianzas de riqueza terminal bajo ambos tipos de comisión; pero, en el caso de comisión por saldo, se reinvierten además las comisiones ahorradas respecto a flujo (para más detalle ver Sección 2.6). El ratio Σ_{NI} en (43) analiza el efecto de la densidad de cotización en la varianza de la riqueza terminal.

Se puede utilizar el ratio del valor en exceso del fondo esperado final corregido por riesgo como forma de comparar los esquemas de comisión por saldo y flujo. Dichos ratios se inspiran en Sharpe (1966) y vienen dados por

$$S_s = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] - \mathbb{E}[\widehat{W}_L(T)]}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{W}_s(T))}}, \quad \text{y} \quad S_f = \frac{\mathbb{E}[\widehat{W}(T)] - \mathbb{E}[\widehat{W}_L(T)]}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{W}(T))}}. \quad (44)$$

Los numeradores de los ratios en (44) representan el valor final esperado del fondo bajo cada esquema de comisión, menos la suma de todos los aportes esperados realizados considerando una capitalización a tasa libre de riesgo. Recordar que a esta última suma se le denomina $\mathbb{E}[\widehat{W}_L(T)]$ y fue definida en (34). Con ello, si $S_s > S_f$, entonces la comisión por saldo sería preferible, caso contrario la comisión por flujo sería preferible. Notar que si utilizamos $\widehat{W}_s(T)$ definida en (28), y actualizamos la acumulación libre de riesgo por la reinversión de comisiones por flujo (ver Sección 2.6), el ratio de riqueza terminal esperada en exceso sobre desviación estándar generada por $\widehat{W}_s(T)$ sería igual a S_s .

Si se asume (razonablemente) que $\mu - \delta > r$, entonces $S_s > 0$ y $S_f > 0$ para cualquier escenario, con lo cual el ratio

$$RS_{sf} = \frac{S_s}{S_f}, \quad (45)$$

estaría bien definido y la comisión por saldo sería preferible sobre flujo si y sólo si $RS_{sf} \geq 1$. Es difícil analizar el comportamiento de RS_{sf} como una función de T o de alguno de los otros parámetros pues, por lo general, no exhibe monotonicidad con respecto a ellos. Sin embargo, es posible determinar el límite de RS_{sf} cuando la fase de acumulación tiende a infinito y se tienen aportes reales iguales.

Proposición 3.1 (Valor de largo plazo de RS_{sf}). *En el proceso de interrupción Z se asume $p_i = 1$ para todo i , y además la secuencia de aportes \mathcal{W}_T es tal que $W_i = W_0 > 0$ para todo i . Si $\mu - \delta > r$ y hacemos a RS_{sf} en (45)*

una función de T , entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{RS}_{sf}(T) = \frac{e^\mu - 1}{e^{\mu-\delta} - 1} \sqrt{\frac{(e^{\mu-\delta+\sigma^2} - 1)(e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1)(e^{\mu+\sigma^2} + 1)}{(e^{\mu+\sigma^2} - 1)(e^{2\mu+\sigma^2} - 1)(e^{\mu-\delta+\sigma^2} + 1)}} \geq 1. \quad (46)$$

Demostración: Ver Apéndice E. □

La Proposición 3.1 nos brinda una forma explícita para calcular el ratio RS_{sf} cuando $T \rightarrow \infty$. Además, nos dice que para un horizonte de aportaciones muy largo se cumple que $S_s \geq S_f$, con lo cual en el largo plazo la comisión por saldo sería preferible a la de flujo. Es importante mencionar que, en general, no se puede garantizar que RS_{sf} sea un función estrictamente creciente en T , ni siquiera en el caso de aportes reales iguales.

3.3.2. Resultados numéricos

La Tabla 10 muestra los resultados de los ratios (en porcentaje) de la Sección 3.3.1 para los escenarios moderado, agresivo y conservador, explicados en la Sección 3.1.1. Se asumen un nivel de comisión por saldo igual a $\delta = 1,00\%$ anual y un nivel de comisión por flujo igual a $\alpha = 0,172$ (corresponde al promedio SPP y se explica en detalle en la Sección 3.1.2). Asimismo, se reportan resultados para diferentes valores de T en años, donde esta variable representa la duración de la fase de acumulación. Se ha asumido también un perfil de contribuciones M/SU , debido a que los otros perfiles de la Tabla 2 generan resultados similares. La densidad de cotización se determina a partir de la Tabla 3, y se considera además que, a partir de los 60 años, el afiliado pasa por defecto al fondo conservador hasta su jubilación, que ocurre al cumplir los 65 años. Las Tablas 11 y 12 muestran los mismos resultados de la Tabla 10 pero bajo comisiones por saldo iguales a $0,5\%$ y $1,5\%$ anual, respectivamente. Además, la Tabla 13 considera los mismos escenarios que los de la Tabla 10 pero bajo una densidad de cotización de 100% , es decir sin interrupciones en las contribuciones.

Por ejemplo, si en la Tabla 10 fijamos $T = 45$ años (correspondería a un afiliado que empieza a aportar al SPP a los 20 años de edad) y un escenario moderado de rentabilidad, entonces tenemos $\Sigma_{CS} = 72,5\%$ y $\Sigma_\nu = 83,9\%$. En el caso de Σ_{CS} , la varianza de riqueza terminal por saldo se reduce en $27,5\%$ con respecto a la varianza de riqueza terminal sin comisiones, y este hecho se debe a la presencia de la comisión por saldo. En el caso de Σ_ν , si consideramos la reinversión de las comisiones ahorradas por flujo, el fondo final bajo comisión por saldo tendría una varianza que sería igual a $83,9\%$

Tabla 10: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,00\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)					Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)					Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)							
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	97.5	112.9	154.0	11.2	26.2	0.43	97.5	112.9	154.0	11.2	26.2	0.43	97.5	112.9	154.0	11.2	26.2	0.43
7	96.3	111.5	107.2	26.4	51.0	0.52	96.1	111.3	95.1	33.2	56.8	0.59	96.4	111.7	115.7	19.0	44.2	0.43
9	94.8	109.8	78.8	47.2	78.9	0.60	94.2	109.1	65.5	60.6	86.9	0.70	95.4	110.5	95.2	26.9	62.1	0.43
11	93.3	108.0	65.1	66.6	102.2	0.65	92.4	107.0	56.0	79.9	104.9	0.76	94.3	109.2	82.8	34.6	79.5	0.44
13	91.7	106.2	58.5	82.3	119.4	0.69	90.8	105.2	52.4	92.0	114.7	0.80	93.2	107.9	74.7	41.9	95.9	0.44
15	90.3	104.5	55.0	94.5	131.6	0.72	89.4	103.5	50.8	99.7	120.2	0.83	92.1	106.6	69.0	48.8	110.9	0.44
17	88.9	102.9	52.9	103.8	140.4	0.74	88.0	101.9	49.9	104.7	123.2	0.85	91.0	105.3	65.0	55.1	124.6	0.44
19	87.6	101.4	51.6	111.2	146.9	0.76	86.7	100.4	49.4	108.0	124.7	0.87	89.9	104.1	62.0	60.9	137.0	0.44
21	86.3	100.0	50.5	117.0	151.7	0.77	85.4	98.9	48.8	110.0	125.2	0.88	88.8	102.8	59.6	66.2	148.0	0.45
23	85.1	98.6	49.6	121.6	155.3	0.78	84.2	97.5	48.2	111.2	124.9	0.89	87.7	101.6	57.6	71.0	157.8	0.45
25	83.9	97.2	48.9	125.5	158.0	0.79	82.9	96.0	47.7	111.7	124.0	0.90	86.6	100.3	56.0	75.4	166.9	0.45
27	82.8	95.9	48.3	128.7	160.0	0.80	81.6	94.6	47.2	111.6	122.7	0.91	85.6	99.1	54.6	79.6	175.0	0.45
29	81.6	94.5	47.8	131.4	161.5	0.81	80.4	93.1	46.8	111.1	121.0	0.92	84.6	97.9	53.4	83.5	182.5	0.46
31	80.4	93.1	47.4	133.6	162.5	0.82	79.1	91.6	46.6	110.2	119.0	0.93	83.5	96.7	52.5	87.2	189.5	0.46
33	79.3	91.8	47.2	135.4	163.0	0.83	77.8	90.1	46.5	109.0	116.7	0.93	82.5	95.5	51.8	90.7	196.1	0.46
35	78.1	90.4	47.0	136.9	163.3	0.84	76.5	88.6	46.4	107.5	114.3	0.94	81.4	94.3	51.2	93.9	202.0	0.46
37	76.9	89.1	46.9	138.0	163.2	0.85	75.2	87.1	46.3	105.8	111.8	0.95	80.4	93.1	50.6	97.1	207.6	0.47
39	75.8	87.8	46.8	138.9	162.8	0.85	74.0	85.7	46.3	104.0	109.2	0.95	79.4	92.0	50.2	100.0	212.6	0.47
41	74.7	86.5	46.7	139.5	162.2	0.86	72.7	84.2	46.3	102.1	106.5	0.96	78.5	90.9	49.8	102.7	217.3	0.47
43	73.6	85.2	46.7	139.9	161.5	0.87	71.5	82.8	46.4	100.1	103.9	0.96	77.5	89.7	49.5	105.3	221.6	0.48
45	72.5	83.9	46.6	140.1	160.6	0.87	70.3	81.5	46.3	98.2	101.3	0.97	76.6	88.7	49.2	107.7	225.5	0.48

Fuente: Elaboración propia

Tabla 11: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 0,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)					Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)					Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)							
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	98.7	114.3	154.0	18.7	26.2	0.72	98.7	114.3	154.0	18.7	26.2	0.72	98.7	114.3	154.0	18.7	26.2	0.72
7	98.1	113.6	107.2	38.8	51.0	0.76	98.0	113.5	95.1	45.0	56.8	0.79	98.2	113.7	115.7	31.7	44.2	0.72
9	97.4	112.8	78.8	63.2	78.9	0.80	97.0	112.4	65.5	73.9	86.9	0.85	97.6	113.1	95.2	44.6	62.1	0.72
11	96.5	111.8	65.1	84.7	102.2	0.83	96.1	111.3	56.0	92.6	104.9	0.88	97.1	112.4	82.8	57.2	79.5	0.72
13	95.7	110.9	58.5	101.2	119.4	0.85	95.3	110.3	52.4	103.6	114.7	0.90	96.5	111.8	74.7	69.2	95.9	0.72
15	95.0	110.0	55.0	113.5	131.6	0.86	94.5	109.5	50.8	110.3	120.2	0.92	95.9	111.1	69.0	80.3	110.9	0.72
17	94.2	109.1	52.9	122.7	140.4	0.87	93.8	108.6	49.9	114.3	123.2	0.93	95.3	110.4	65.0	90.5	124.6	0.73
19	93.5	108.3	51.6	129.6	146.9	0.88	93.1	107.8	49.4	116.7	124.7	0.94	94.7	109.7	62.0	99.8	137.0	0.73
21	92.9	107.6	50.5	135.0	151.7	0.89	92.4	107.0	48.8	117.9	125.2	0.94	94.2	109.0	59.6	108.0	148.0	0.73
23	92.2	106.8	49.6	139.2	155.3	0.90	91.7	106.2	48.2	118.4	124.9	0.95	93.6	108.4	57.6	115.6	157.8	0.73
25	91.6	106.0	48.9	142.5	158.0	0.90	91.0	105.4	47.7	118.2	124.0	0.95	93.0	107.7	56.0	122.5	166.9	0.73
27	90.9	105.3	48.3	145.2	160.0	0.91	90.3	104.6	47.2	117.5	122.7	0.96	92.4	107.0	54.6	128.9	175.0	0.74
29	90.3	104.5	47.8	147.3	161.5	0.91	89.6	103.8	46.8	116.4	121.0	0.96	91.8	106.4	53.4	134.8	182.5	0.74
31	89.6	103.8	47.4	148.9	162.5	0.92	88.9	102.9	46.6	114.9	119.0	0.97	91.3	105.7	52.5	140.4	189.5	0.74
33	88.9	103.0	47.2	150.1	163.0	0.92	88.1	102.1	46.5	113.2	116.7	0.97	90.7	105.0	51.8	145.6	196.1	0.74
35	88.3	102.2	47.0	151.0	163.3	0.92	87.4	101.2	46.4	111.2	114.3	0.97	90.1	104.3	51.2	150.5	202.0	0.74
37	87.6	101.5	46.9	151.5	163.2	0.93	86.7	100.4	46.3	109.1	111.8	0.98	89.5	103.7	50.6	155.0	207.6	0.75
39	87.0	100.7	46.8	151.8	162.8	0.93	85.9	99.5	46.3	106.9	109.2	0.98	89.0	103.0	50.2	159.2	212.6	0.75
41	86.3	99.9	46.7	151.8	162.2	0.94	85.2	98.7	46.3	104.6	106.5	0.98	88.4	102.4	49.8	163.2	217.3	0.75
43	85.6	99.2	46.7	151.6	161.5	0.94	84.5	97.8	46.4	102.3	103.9	0.98	87.9	101.7	49.5	166.9	221.6	0.75
45	85.0	98.4	46.6	151.3	160.6	0.94	83.8	97.0	46.3	100.0	101.3	0.99	87.3	101.1	49.2	170.2	225.5	0.75

Fuente: Elaboración propia

Tabla 12: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a $1,58\%$ del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)					Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)					Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)							
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	96.3	111.5	154.0	3.7	26.2	0.14	96.3	111.5	154.0	3.7	26.2	0.14	96.3	111.5	154.0	3.7	26.2	0.14
7	94.6	109.5	107.2	13.9	51.0	0.27	94.2	109.1	95.1	21.2	56.8	0.37	94.8	109.7	115.7	6.3	44.2	0.14
9	92.4	107.0	78.8	30.9	78.9	0.39	91.5	105.9	65.5	47.0	86.9	0.54	93.2	107.9	95.2	9.0	62.1	0.14
11	90.1	104.4	65.1	48.1	102.2	0.47	88.8	102.9	56.0	66.7	104.9	0.64	91.7	106.1	82.8	11.5	79.5	0.15
13	87.9	101.8	58.5	62.7	119.4	0.53	86.6	100.3	52.4	79.8	114.7	0.70	90.1	104.3	74.7	14.0	95.9	0.15
15	85.8	99.4	55.0	74.5	131.6	0.57	84.6	97.9	50.8	88.5	120.2	0.74	88.5	102.5	69.0	16.4	110.9	0.15
17	83.9	97.2	52.9	83.8	140.4	0.60	82.7	95.7	49.9	94.4	123.2	0.77	86.9	100.6	65.0	18.5	124.6	0.15
19	82.1	95.1	51.6	91.4	146.9	0.62	80.8	93.6	49.4	98.6	124.7	0.79	85.3	98.8	62.0	20.5	137.0	0.15
21	80.4	93.1	50.5	97.6	151.7	0.64	79.1	91.6	48.8	101.4	125.2	0.81	83.8	97.1	59.6	22.4	148.0	0.15
23	78.7	91.1	49.6	102.7	155.3	0.66	77.3	89.6	48.2	103.3	124.9	0.83	82.3	95.4	57.6	24.1	157.8	0.15
25	77.1	89.2	48.9	107.0	158.0	0.68	75.6	87.6	47.7	104.4	124.0	0.84	80.9	93.7	56.0	25.7	166.9	0.15
27	75.5	87.4	48.3	110.6	160.0	0.69	73.9	85.6	47.2	105.0	122.7	0.86	79.4	92.0	54.6	27.1	175.0	0.16
29	73.9	85.6	47.8	113.8	161.5	0.70	72.2	83.6	46.8	105.1	121.0	0.87	78.0	90.4	53.4	28.5	182.5	0.16
31	72.3	83.8	47.4	116.5	162.5	0.72	70.5	81.6	46.6	104.8	119.0	0.88	76.6	88.7	52.5	29.9	189.5	0.16
33	70.8	81.9	47.2	118.8	163.0	0.73	68.8	79.7	46.5	104.1	116.7	0.89	75.2	87.1	51.8	31.2	196.1	0.16
35	69.2	80.2	47.0	120.8	163.3	0.74	67.1	77.7	46.4	103.1	114.3	0.90	73.8	85.5	51.2	32.4	202.0	0.16
37	67.7	78.4	46.9	122.5	163.2	0.75	65.4	75.8	46.3	101.9	111.8	0.91	72.5	84.0	50.6	33.5	207.6	0.16
39	66.2	76.7	46.8	123.8	162.8	0.76	63.8	73.9	46.3	100.6	109.2	0.92	71.2	82.4	50.2	34.6	212.6	0.16
41	64.8	75.0	46.7	125.0	162.2	0.77	62.2	72.1	46.3	99.1	106.5	0.93	69.9	81.0	49.8	35.7	217.3	0.16
43	63.3	73.4	46.7	125.9	161.5	0.78	60.7	70.3	46.4	97.4	103.9	0.94	68.7	79.5	49.5	36.7	221.6	0.17
45	62.0	71.8	46.6	126.6	160.6	0.79	59.2	68.6	46.3	95.8	101.3	0.95	67.5	78.2	49.2	37.6	225.5	0.17

Fuente: Elaboración propia

Tabla 13: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización se asume 100% (no interrupciones), $\delta = 1,00\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	96.9	112.2	100.0	43.3	100.1	0.43	96.9	112.2	100.0	43.3	100.1	0.43	96.9	112.2	100.0	43.3	100.1	0.43
7	95.4	110.5	100.0	63.8	123.5	0.52	95.0	110.0	100.0	70.4	120.7	0.58	95.7	110.9	100.0	50.8	116.9	0.43
9	93.8	108.6	100.0	81.3	135.6	0.60	93.2	108.0	100.0	85.9	123.1	0.70	94.6	109.5	100.0	57.2	130.9	0.44
11	92.3	106.9	100.0	93.3	142.6	0.65	91.8	106.3	100.0	95.2	124.9	0.76	93.4	108.2	100.0	62.8	142.9	0.44
13	91.0	105.4	100.0	102.3	147.9	0.69	90.5	104.8	100.0	101.6	126.8	0.80	92.3	106.9	100.0	67.8	153.5	0.44
15	89.7	103.9	100.0	109.5	152.3	0.72	89.2	103.3	100.0	106.1	128.1	0.83	91.2	105.6	100.0	72.4	163.0	0.44
17	88.5	102.5	100.0	115.4	155.9	0.74	87.9	101.8	100.0	109.3	128.8	0.85	90.1	104.3	100.0	76.6	171.5	0.45
19	87.3	101.1	100.0	120.3	158.8	0.76	86.7	100.3	100.0	111.4	128.8	0.87	89.0	103.1	100.0	80.5	179.3	0.45
21	86.1	99.7	100.0	124.4	161.2	0.77	85.4	98.9	100.0	112.7	128.3	0.88	87.9	101.8	100.0	84.2	186.4	0.45
23	84.9	98.3	100.0	127.9	163.0	0.78	84.1	97.4	100.0	113.3	127.3	0.89	86.9	100.6	100.0	87.6	192.9	0.45
25	83.7	97.0	100.0	130.8	164.4	0.80	82.8	95.9	100.0	113.4	125.9	0.90	85.8	99.4	100.0	90.8	198.9	0.46
27	82.6	95.6	100.0	133.3	165.4	0.81	81.5	94.4	100.0	113.0	124.1	0.91	84.8	98.2	100.0	93.8	204.5	0.46
29	81.4	94.3	100.0	135.3	166.0	0.82	80.3	93.0	100.0	112.2	122.1	0.92	83.8	97.0	100.0	96.7	209.6	0.46
31	80.2	92.9	100.0	137.0	166.3	0.82	79.0	91.5	100.0	111.1	119.9	0.93	82.8	95.8	100.0	99.5	214.4	0.46
33	79.1	91.6	100.0	138.3	166.3	0.83	77.7	90.0	100.0	109.7	117.5	0.93	81.7	94.7	100.0	102.1	218.9	0.47
35	77.9	90.3	100.0	139.4	166.0	0.84	76.5	88.5	100.0	108.1	115.0	0.94	80.7	93.5	100.0	104.6	223.1	0.47
37	76.8	88.9	100.0	140.2	165.6	0.85	75.2	87.1	100.0	106.4	112.4	0.95	79.8	92.4	100.0	107.0	227.0	0.47
39	75.7	87.6	100.0	140.8	164.9	0.85	74.0	85.6	100.0	104.5	109.7	0.95	78.8	91.2	100.0	109.2	230.6	0.47
41	74.6	86.4	100.0	141.2	164.1	0.86	72.7	84.2	100.0	102.6	107.0	0.96	77.9	90.2	100.0	111.4	233.9	0.48
43	73.5	85.1	100.0	141.4	163.2	0.87	71.5	82.8	100.0	100.6	104.4	0.96	76.9	89.1	100.0	113.4	237.0	0.48
45	72.4	83.9	100.0	141.4	162.1	0.87	70.3	81.5	100.0	98.6	101.8	0.97	76.0	88.1	100.0	115.4	239.8	0.48

Fuente: Elaboración propia

de la varianza de riqueza terminal generada por la comisión por flujo. Para el mismo afiliado, tenemos $\Sigma_{NI} = 46,6\%$, el cual corresponde al efecto de la densidad de cotización de la Tabla 3 en la varianza de riqueza terminal (recordar que en este ratio no se consideran comisiones). Además, los valores correspondientes de S_s , S_f y $\frac{S_s}{S_f}$ son 140.1% , 160.6% y 0.87 , respectivamente; con lo cual, para este escenario la comisión por flujo sería preferible.

La Figura 4 muestra información de los ratios Σ_{CS} , Σ_ν y Σ_{NI} para el escenario moderado de la Tabla 10, y se observa que todos ellos son decrecientes en T , $\Sigma_{CS} < \Sigma_\nu$ y $\Sigma_\nu = 1$ cuando $T \approx 21$ años. La Figura 5 muestra los valores de S_s contenidos también en la Tabla 10, y notamos que para los escenarios conservador y agresivo S_s es una función creciente en T ; sin embargo, lo anterior no se puede afirmar para el escenario agresivo, pues S_s es creciente hasta $T \approx 25$ años y de allí decrece. Esto implica que, a partir de cierto horizonte de aportación, no sería adecuado permanecer únicamente en el fondo de riesgo alto del SPP.

La Figura 6 muestra el cociente S_s/S_f para los escenarios de la Tabla 10. Vemos que la comisión por saldo mejora (en forma relativa con respecto a flujo) con T , pero sin llegar a pasar el umbral de uno, i.e., la comisión por flujo siempre sería preferible si utilizamos los ratios en (44) para la comparación. Sin embargo, es importante recordar que si $T \rightarrow \infty$, entonces S_s tendería a ser mayor que S_f como lo indica la Proposición 3.1.

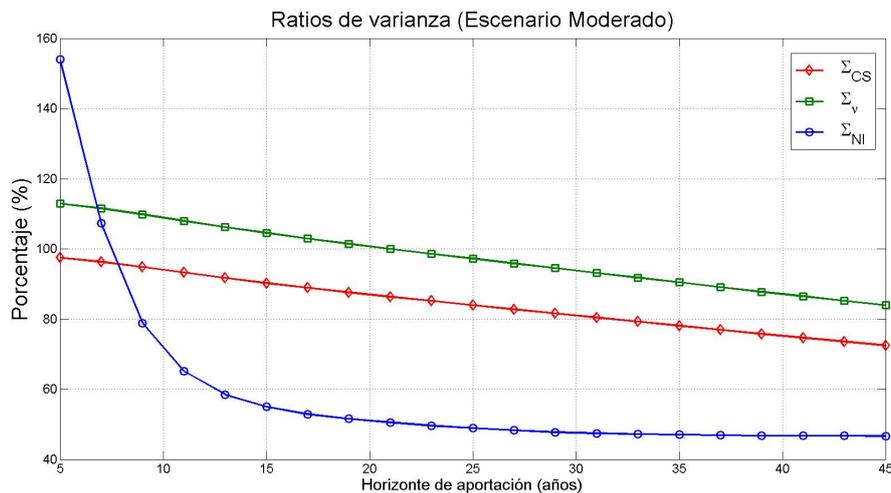


Figura 4: Ratios Σ_{CS} , Σ_ν y Σ_{NI} (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario moderado (rentabilidad $r_M = 5,00\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

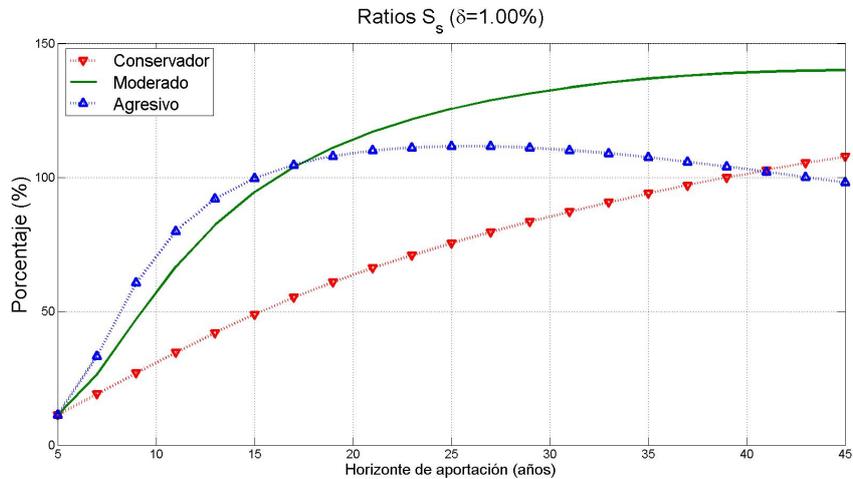


Figura 5: Ratio S_s (definido en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo tres escenarios de rentabilidad: moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual), agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual) y conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

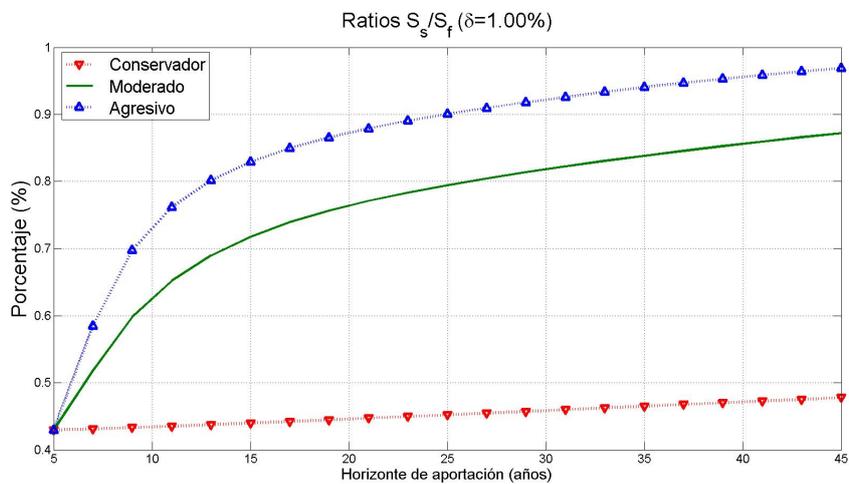


Figura 6: Ratio S_s/S_f (con S_s y S_f definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo tres escenarios de rentabilidad: moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual), agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual) y conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

A partir de las Tablas 11 y 12, podemos analizar los ratios bajo niveles

de comisión por saldo de 0.50 % y 1.50 %, respectivamente. Los ratios Σ_{CS} y Σ_{ν} disminuyen al aumentar δ , pues la varianza de riqueza terminal es por lo general una función decreciente en δ . Asimismo, S_s mejora al disminuir el nivel de la comisión por saldo, pues todos los ratios $\frac{S_s}{S_f}$ son mayores cuando $\delta = 0,50\%$ que en el caso que considera $\delta = 1,50\%$. El efecto de δ en $\frac{S_s}{S_f}$ es mayor para T pequeños y el escenario conservador. Se puede observar que para todos los escenarios considerados en el estudio, $S_s < S_f$, con lo cual la comisión por flujo sería preferible si se utiliza esta forma de comparación. Finalmente, la Tabla 13 muestra los mismos escenarios de la Tabla 10, pero sin contar interrupciones. Se puede observar, a partir de la Tabla 13, que los valores de los ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} (este último toma siempre valor 100 %), S_s y S_f cambian con respecto a los valores correspondientes en la Tabla 10; pero el ratio $\frac{S_s}{S_f}$ se mantiene prácticamente idéntico, lo cual implica que la densidad de cotización no tendría mayor impacto en la comparación relativa de comisiones.

4. Conclusiones

En el presente artículo se ha desarrollado una metodología en tiempo discreto que permite determinar el efecto de la rentabilidad del fondo y su volatilidad, la densidad de cotización y las comisiones de administración en la riqueza esperada terminal de una CIC. Asimismo, se desarrollan criterios para comparar comisiones por flujo y saldo, uno de los cuales es el ratio de riqueza esperada en exceso sobre la desviación estándar de riqueza terminal (denominado como S e inspirado en Sharpe (1966)). A partir del desarrollo teórico realizado y de su aplicación práctica al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP), se puede afirmar que una comparación de comisiones utilizando solamente valores esperados de fondos finales resulta incompleta e imprecisa, ya que cuando dicha comparación se corrige por riesgo, las conclusiones tienden a cambiar, y de manera importante en algunos casos.

En términos de resultados numéricos, para el SPP se puede afirmar que la comisión por flujo resulta más atractiva que la comisión por saldo al compararlas a través del ratio S . Es decir, que para distintos escenarios de rentabilidad, tiempo de aportación y niveles de comisiones por saldo, el ratio correspondiente a la comisión por flujo es superior al obtenido bajo comisión por saldo. Sin embargo, a medida que la edad del afiliado disminuye o la rentabilidad del fondo aumenta, la comisión por saldo tiende a mejorar. Además, en el artículo se presenta un resultado teórico importante en el que se demuestra que bajo ciertos supuestos (aportes reales, tasas de crecimiento

y comisiones constantes), el ratio S de la comisión por saldo es mayor que el de flujo, pero esto ocurre para un horizonte infinito de aportaciones. Cabe mencionar que la comparación de comisiones incorporando aversión al riesgo del afiliado y comisiones de equivalencia entre flujo y saldo se analiza y estudia en detalle en Chavez-Bedoya (2015b).

Es posible hacer muchos refinamientos a la metodología y a los métodos de comparación, los cuales pueden generar nuevas investigaciones. Por ejemplo, podrían considerarse comisiones variables por saldo según la evolución de las comisiones equivalentes desde la perspectiva de la AFP, y procesos estocásticos más sofisticados para el valor cuota y las variables económicas relevantes. Asimismo, sería interesante contrastar los esquemas utilizando políticas óptimas que permitan cambiar el nivel de riesgo y rendimiento del fondo de acuerdo a la edad del afiliado y tamaño del fondo, en un contexto de optimización estocástica en tiempo discreto. En esta línea, también se podría extender Moloche (2012) para diferentes edades y tasas de reinversión de las comisiones ahorradas por flujo. Más aún, es posible trabajar bajo el supuesto de compleción del mercado, y brindar expresiones para determinar comisiones de indiferencia utilizando valuación en ausencia de oportunidades de arbitraje.

Referencias

- Arenas de Mesa, A. y Mesa-Lago, C. (2006). The structural pension reform in Chile: Effects, comparisons with other Latin American reforms, and lessons. *Oxford Review of Economic Policy*, 22(1):149–167.
- Arrau, P., Valdés-Prieto, S., y Schmidt-Hebbel, K. (1993). Privately managed pension systems: Design issues and the chilean experience. Tech. report, World Bank, Washington DC.
- Ashenfelter, O. (2012). Comparing real wage rates. *The American Economic Review*, 102(2):617–642.
- Battocchio, P. y Menoncin, F. (2004). Optimal pension management in a stochastic framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(1):79–95.
- Blake, D. y Board, J. (2000). Measuring value added in the pensions industry. *Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 25(4):539–567.

- Blake, D., Cairns, A., y Dowd, K. (2001). Pensionmetrics: Stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(2):187–215.
- Cairns, A., Blake, D., y Dowd, K. (2006). Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(5):843–877.
- Castro, J. y Yamada, G. (2010). Las diferencias étnicas y de género en el acceso a la educación básica y superior en el Perú. Tech. report, Centro de Investigación y Departamento de Economía de la Universidad del Pacífico, Lima.
- Chavez-Bedoya, L. (2015a). The impact of risk aversion and density of contribution on the comparison of administrative charges in individual account pension systems. Universidad Esan Working Paper.
- Chavez-Bedoya, L. (2015b). Metodología para comparar comisiones por flujo y saldo en fondos de pensiones. Aceptado en Estudios de Economía de la Universidad de Chile.
- Corvera, F., Lartigue, J., y Madero, D. (2006). Análisis comparativo de las comisiones por administración de los fondos de pensiones en los países de América Latina. Mexico.
- Devesa-Carpio, J., Rodríguez-Barrera, R., y Vidal-Meliá, C. (2003). Medición y comparación internacional de los costes de administración para el afiliado en las cuentas individuales de capitalización. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXXII(116):95–144.
- Devolder, P., Bosch Princep, M., y Domínguez Fabián, I. (2003). Stochastic optimal control of annuity contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2):227–238.
- Diamond, P. (2000). Administrative costs and equilibrium charges with individual accounts. En *Administrative Aspects of Investment-based Social Security Reform*, pp. 137–172. Chicago, University of Chicago Press.
- Diamond, P. y Valdés-Prieto, S. (1994). Social security reforms. *The Chilean economy: Policy lessons and challenges*, pp. 257–328.
- Edwards, S. (1998). The Chilean pension reform: A pioneering program. En *Privatizing social security*, pp. 33–62. Chicago, University of Chicago Press.

- Escrivá, J., Fuentes, E., y García-Herrero, A. (2010). Balance de las reformas de pensiones en Latinoamérica. En *Las Reformas de los Sistemas de Pensiones en Latinoamérica: Avances y Temas Pendientes*, pp. 11–39. Madrid, BBVA.
- Gómez-Hernández, D. y Stewart, F. (2008). Comparison of costs + fees in countries with private defined contribution pension systems. *International Organisation of Pension Supervisors*, pp. 1–37.
- Haberman, S. y Vigna, E. (2002). Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1):35–69.
- Han, N. y Hung, M. (2012). Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1):172–181.
- James., E., Smalhout, J., y Vittas, D. (2001). Administrative costs and the organization of individual retirement account systems: a comparative perspective. World Bank Policy Research Working Paper 2554.
- Kay, S. y Kritzer, B. (2001). Social security in Latin America: recent reforms and challenges. *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, 86(1):41–52.
- Kritzer, B., Kay, S., y Sinha, T. (2011). Next generation of individual account pension reforms in Latin America. *Social Security Bulletin*, 71(1):35–76.
- Marthans, J. y Stok, J. (2013). Una propuesta para reformar los sistemas privados de pensiones: el caso peruano. Documento de trabajo, Universidad de Piura.
- Martínez, O. y Murcia, A. (2008). Sistema de comisiones de las administradoras de fondos de pensiones en Colombia. Reporte de Estabilidad Financiera, Banco de la República de Colombia.
- Masías, L. y Sánchez, E. (2007). Competencia y reducción de comisiones en el sistema privado de pensiones: El caso peruano. Documento de Trabajo DT/02/2006, Superintendencia de Banca, Seguros y Administradoras de Fondos de Pensiones (SBS).
- Medina, A., Gallegos, C., Vivallo, C., Cea, Y., y Alarcón, A. (2013). Efecto sobre la rentabilidad que tiene para el afiliado la comisión cobrada por las administradoras de fondos de pensiones. *Journal of Economics Finance and Administrative Science*, 18(34):24–33.

- Mesa-Lago, C. (2006). Private and public pension systems compared: An evaluation of the Latin American experience. *Review of Political Economy*, 18(3):317–334.
- Mincer, J. (1974). Schooling and earnings. En *Schooling, experience, and earnings*, pp. 41–63. New York, Columbia University Press.
- Mitchell, O. (1998). Administrative costs in public and private retirement systems. En *Privatizing Social Security*, pp. 403–456. Chicago, University of Chicago Press.
- Moloche, G. (2012). Política óptima de inversiones de las AFP's: Implicancias del marco regulatorio y los esquemas de comisiones. Tech. report, Consorcio de investigación económica y social (CIES).
- Murthi, M., Orszag, J., y Orszag, P. (1999). Administrative costs under a decentralized approach to individual accounts: Lessons from the United Kingdom. En *Conference on "New Ideas about Old Age Security"*, New York, World Bank.
- SBS (2013). Anexo Técnico 1: Metodología aplicable a los cálculos del aplicativo de comparación de comisiones. Tech. report, Superintendencia de Banca, Seguros y AFP, República del Perú.
- Shah, H. (1997). Towards better regulation of private pension funds. World Bank Policy Research Working Paper 1791.
- Sharpe, W. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of Business*, 39(1):119–138.
- Sharpe, W. (1998). Regulation and supervision of pension funds: principles and practices. *International Social Security Review*, 51(2):39–55.
- Sinha, T. (2000). *Pension reform in Latin America and its lessons for international policymakers*. Kluwer Academic Pub.
- Sinha, T. (2001). Analyzing management fees of pension funds: A case study of Mexico. *Journal of Actuarial Practice*, 9:5–43.
- Tapia, W. y Yermo, J. (2008). Fees in individual account pension systems: A cross-country comparison. OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions No.27, OECD Publishing.
- Vigna, E. (2010). On efficiency of mean-variance based portfolio selection in DC pension schemes. Carlo Alberto Notebooks 154.

Whitehouse, E. (2001). Administrative charges for funded pensions: comparison and assessment of 13 countries. *Private Pension Systems: Administrative Costs and Reforms*, pp. 85–154.

ANEXO

A. Demostración de la Proposición 2.1

Para el cálculo de $\text{Var}(W_s(T))$, es necesario calcular la varianza de $W_s^i(T)$ y la covarianza entre $W_s^i(T)$ y $W_s^j(T)$. Como $W_s^i(T)$ tiene una distribución log-normal

$$\text{Var}(W_s^i(T)) = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - 1 \right). \quad (47)$$

Asimismo, se quiere verificar que para $j > i$ y $W_j > 0$

$$\text{Cov}(W_s^i(T), W_s^j(T)) = \sigma_{W_s^i(T), W_s^j(T)} = \text{Var}(W_s^j(T)) \frac{W_i}{W_j} e^{(\mu-\delta)(j-i)}, \quad (48)$$

donde el GBM W_s^i se define en (2).

A partir de las propiedades de W_s^i , se tiene

$$\sigma_{W_s^i(T), W_s^j(T)} = W_i W_j e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(T-i+T-j)} \text{Cov} \left(e^{\sigma(B(T)-B(i))}, e^{\sigma(B(T)-B(j))} \right) \quad (49)$$

$$= W_i W_j e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(T-i+T-j)} \text{Cov} \left(e^{\sigma(B(T)-B(j)+B(j)-B(i))}, e^{\sigma(B(T)-B(j))} \right) \quad (50)$$

$$= W_i W_j e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(T-i+T-j)} \mathbb{E} \left[e^{\sigma(B(j)-B(i))} \right] \text{Var} \left(e^{\sigma(B(T)-B(j))} \right) \quad (51)$$

$$= W_i W_j e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(T-i+T-j)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(j-i)} e^{\sigma^2(T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-j)} - 1 \right) \quad (52)$$

$$= W_j^2 e^{2(\mu-\delta)(T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-j)} - 1 \right) \frac{W_i}{W_j} e^{(\mu-\delta)(j-i)} \quad (53)$$

$$= \text{Var}(W_s^j(T)) \frac{W_i}{W_j} e^{(\mu-\delta)(j-i)}. \quad (54)$$

Para obtener (51) se utiliza el hecho que $B(T) - B(j)$ es independiente de $B(j) - B(i)$.

Las fórmulas (47) y (48) generan la siguiente expresión para la covarianza de los valores finales de los aportes i y j para todo $0 \leq i \leq T-1$ y $0 \leq j \leq T-1$

$$\text{Cov}(W_s^i(T), W_s^j(T)) = W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (55)$$

Utilizando (55), se puede calcular la varianza de $W_s(T)$ a través de

$$\text{Var}(W_s(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (56)$$

B. Demostración de la Proposición 2.2

Sólo vamos a mostrar el resultado correspondiente a $\text{Var}(\widehat{W}_s(T))$, debido a que $\text{Var}(\widehat{W}_f(T))$ se puede obtener asumiendo $\delta = 0$ y multiplicando la expresión resultante por $e^{-2\alpha}$.

Primero, trabajamos con $\text{Var}(Z_i W_s^i(T))$. Es claro que

$$\mathbb{E}[W_s^i(T)^2] = \text{Var}(W_s^i(T)) + \mathbb{E}[W_s^i(T)]^2 = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} e^{\sigma^2(T-i)}, \quad (57)$$

porque

$$\mathbb{E}[W_s^i(T)] = W_i e^{(\mu-\delta)(T-i)}, \quad (58)$$

y

$$\text{Var}(W_s^i(T)) = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - 1 \right). \quad (59)$$

Entonces,

$$\text{Var}(Z_i W_s^i(T)) = \mathbb{E}[Z_i^2 W_s^i(T)^2] - \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T)]^2 \quad (60)$$

$$= \mathbb{E}[Z_i^2] \mathbb{E}[W_s^i(T)^2] - \mathbb{E}[Z_i]^2 \mathbb{E}[W_s^i(T)]^2 \quad (61)$$

$$= p_i \mathbb{E}[W_s^i(T)^2] - p_i^2 \mathbb{E}[W_s^i(T)]^2 \quad (62)$$

$$= p_i W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} e^{\sigma^2(T-i)} - p_i^2 W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \quad (63)$$

$$= p_i W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - p_i \right). \quad (64)$$

Para obtener (61), utilizamos el hecho que $W_s^i(T)$ y Z_i son independientes. La expresión (62) se justifica porque $Z_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ y $\mathbb{E}[Z_i^2] = \mathbb{E}[Z_i] = p_i$. Para obtener (63), se han utilizado (58) y (57). También es importante calcular la covarianza de $Z_i W_s^i(T)$ y $Z_j W_s^j(T)$ para $i \neq j$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_i W_s^i(T), Z_j W_s^j(T)) \\ = \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T) Z_j W_s^j(T)] - \mathbb{E}[Z_i W_s^i(T)] \mathbb{E}[Z_j W_s^j(T)] \end{aligned} \quad (65)$$

$$= \mathbb{E}[Z_i Z_j] \mathbb{E}[W_s^i(T) W_s^j(T)] - \mathbb{E}[Z_i] \mathbb{E}[Z_j] \mathbb{E}[W_s^i(T)] \mathbb{E}[W_s^j(T)] \quad (66)$$

$$= p_i p_j \left(\mathbb{E}[W_s^i(T) W_s^j(T)] - \mathbb{E}[W_s^i(T)] \mathbb{E}[W_s^j(T)] \right) \quad (67)$$

$$= p_i p_j \text{Cov}(W_s^i(T), W_s^j(T)) \quad (68)$$

$$= p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (69)$$

En (66) hemos utilizado el hecho que B y Z son procesos independientes. Además, (67) se justifica debido a que $\{Z_i\}$ es una secuencia independiente

y $\mathbb{E}[Z_i] = p_i$ para todo i . En (69) se ha utilizado la expresión (48). De esta forma, $\text{Var}(\widehat{W}_s(T))$ se puede expresar como

$$\text{Var}(\widehat{W}_s(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{T-1} \text{Cov}(Z_i W_s^i(T), Z_j W_s^j(T)) + \sum_{i=0}^{T-1} \text{Var}(Z_i W_s^i(T)) \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{T-1} p_i p_j W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{T-1} p_i W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - p_i \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Para obtener (71) se han utilizado las expresiones de $\text{Cov}(Z_i W_s^i(T), Z_j W_s^j(T))$ y $\text{Var}(Z_i W_s^i(T))$. Finalmente, después de algunas manipulaciones algebraicas obtenemos $\text{Var}(\widehat{W}_s(T))$, la cual coincide con la expresión dada en (14).

C. Demostración de la Proposición 2.3

Sólo vamos a mostrar el resultado correspondiente a $\text{Var}(\widehat{W}_s(T))$, debido a que $\text{Var}(\widehat{W}_f(T))$ se puede obtener al asumir $\delta = 0$ en la varianza por saldo y multiplicar por $e^{-2\alpha}$ la expresión resultante.

Se verifica inmediatamente que, al considerar $p_i = p$ en (14) y tomar la derivada parcial con respecto de p , se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_p \text{Var}(\widehat{W}_s(p, T)) &= 2p \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right) \\ &\quad + (1 - 2p) \sum_{i=1}^{T-1} W_i^2 e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)(T-i)}. \end{aligned} \quad (72)$$

Se observa claramente que si $0 < p \leq \frac{1}{2}$ se tiene $\partial_p \text{Var}(\widehat{W}_s(p, T)) > 0$. Después de algunas simplificaciones en (72) tenemos

$$\partial_p \text{Var}(\widehat{W}_s(p, T)) = 2p \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{T-1} W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - 2p \right). \quad (73)$$

Finalmente, (73) será mayor que cero si $e^{\sigma^2(T-i)} - 2p > 0$ para todo $0 \leq i \leq T-1$, lo cual se satisface cuando $e^{\sigma^2} - 2p > 0$, o equivalentemente cuando $\sigma^2 > \ln(2p)$.

D. Demostración de la Proposición 2.4

Las expresiones de $\mathbb{E}[\widehat{W}_s(1)]$ y $\text{Var}(\widehat{W}_s(1))$ se derivan inmediatamente de (12) y (14) cuando se hace $T = 1$. Además, si $T \geq 2$, entonces se puede expresar $\widehat{W}_s(T)$ como

$$\widehat{W}_s(T) = (\widehat{W}_s(T-1) + Z_{T-1}W_{T-1}) \frac{V_s(T)}{V_s(T-1)}, \quad (74)$$

donde

$$\frac{V_s(T)}{V_s(T-1)} = e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})+\sigma(B(T)-B(T-1))}, \quad (75)$$

y V_s es el valor cuota del fondo de pensiones descrito en la Sección 2 pero ajustado por la comisión por saldo δ , i.e., se ajusta el drift de la EDE (1) al cambiar μ por $\mu - \delta$. Además, por las propiedades de la distribución lognormal, se tiene $\mathbb{E}[V_s(T)/V_s(T-1)] = e^{\mu-\delta}$ y $\text{Var}(V_s(T)/V_s(T-1)) = e^{2(\mu-\delta)}(e^{\sigma^2} - 1)$. Como $\widehat{W}_s(T-1)$ y Z_{T-1} son independientes de $V_s(T)/V_s(T-1)$ (debido a los incrementos independientes del GBM), tenemos

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T)] = \mathbb{E}[\widehat{W}_s(T-1) + Z_{T-1}W_{T-1}] \times \mathbb{E}\left[\frac{V_s(T)}{V_s(T-1)}\right] \quad (76)$$

$$= e^{\mu-\delta}(\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T-1)] + p_{T-1}W_{T-1}). \quad (77)$$

Por definición del proceso de interrupción, Z , las variables aleatorias $\widehat{W}_s(T-1)$ y Z_{T-1} son independientes entre sí; con lo cual, aplicando la fórmula de la varianza del producto de variables aleatorias independientes, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{W}_s(T)) &= \text{Var}\left(\widehat{W}_s(T-1) + Z_{T-1}W_{T-1}\right) \times \mathbb{E}\left[\left(\frac{V_s(T)}{V_s(T-1)}\right)^2\right] \\ &\quad + (\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T-1) + Z_{T-1}W_{T-1}])^2 \times \text{Var}\left(\frac{V_s(T)}{V_s(T-1)}\right) \quad (78) \\ &= (\text{Var}(\widehat{W}_s(T-1)) + p_{T-1}(1-p_{T-1}))W_{T-1} \times e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} \end{aligned}$$

$$+(\mathbb{E}[\widehat{W}_s(T-1)] + p_{T-1}W_{T-1})^2 \times e^{2(\mu-\delta)}(e^{\sigma^2} - 1). \quad (79)$$

Finalmente, reemplazamos (77) en (79) y obtenemos la expresión recursiva de la varianza dada por (17).

E. Demostración de la Proposición 3.1

Para el caso de aportes iguales, i.e., $W_i = W_0 > 0$, y ausencia de interrupciones, se tiene que

$$\mathbb{E}[W_s(T)^2] = W_0 \left[\frac{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2} + 1}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1} A_s(T) - \frac{2e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1} \mathbb{E}[W_s(T)] \right], \quad (80)$$

donde $W_s(T)$ es dado por (3),

$$\mathbb{E}[W_s(T)] = W_0 \frac{e^{\mu-\delta} (e^{(\mu-\delta)T} - 1)}{e^{\mu-\delta} - 1}, \quad (81)$$

y $A_s(T)$ satisface

$$A_s(T) = W_0 \frac{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} (e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)T} - 1)}{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1}. \quad (82)$$

En el caso de la comisión por flujo, se tiene que

$$\mathbb{E}[W(T)^2] = W_0 \left[\frac{e^{\mu+\sigma^2} + 1}{e^{\mu+\sigma^2} - 1} A(T) - \frac{2e^{\mu+\sigma^2}}{e^{\mu+\sigma^2} - 1} \mathbb{E}[W(T)] \right], \quad (83)$$

donde $W(T)$ es la riqueza terminal en ausencia de comisiones e interrupciones,

$$\mathbb{E}[W(T)] = W_0 \frac{e^{\mu} (e^{\mu T} - 1)}{e^{\mu} - 1}, \quad (84)$$

y $A(T)$ satisface

$$A(T) = W_0 \frac{e^{2\mu+\sigma^2} (e^{(2\mu+\sigma^2)T} - 1)}{e^{2\mu+\sigma^2} - 1}. \quad (85)$$

Luego se definen las inversas de los coeficientes de variación generadas por las comisiones, como

$$H_s = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\sqrt{\text{Var}(W_s(T))}}, \quad \text{y} \quad H_f = \frac{\mathbb{E}[W(T)]}{\sqrt{\text{Var}(W(T))}}. \quad (86)$$

Sin pérdida de generalidad, se asume $W_i = 1$ para todo i , y utilizando las expresiones (80) y (83), se tiene

$$H_s = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\sqrt{\frac{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}+1}{e^{\mu+\sigma^2}-1}A_s(T) - \frac{2e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}}{e^{\mu+\sigma^2}-1}\mathbb{E}[W_s(T)] - \mathbb{E}[W_s(T)]^2}}, \quad (87)$$

$$H_f = \frac{\mathbb{E}[W(T)]}{\sqrt{\frac{e^{\mu+\sigma^2}+1}{e^{\mu+\sigma^2}-1}A(T) - \frac{2e^{\mu+\sigma^2}}{e^{\mu+\sigma^2}-1}\mathbb{E}[W(T)] - \mathbb{E}[W(T)]^2}}. \quad (88)$$

Adicionalmente, el ratio de las inversas de los coeficientes de variación es

$$\frac{H_s}{H_f} = \frac{\sqrt{\frac{e^{\mu+\sigma^2}+1}{e^{\mu+\sigma^2}-1} \frac{A(T)}{\mathbb{E}[W(T)]^2} - \frac{2e^{\mu+\sigma^2}}{e^{\mu+\sigma^2}-1} \frac{1}{\mathbb{E}[W(T)]} - 1}}{\sqrt{\frac{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}+1}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}-1} \frac{A_s(T)}{\mathbb{E}[W_s(T)]^2} - \frac{2e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}-1} \frac{1}{\mathbb{E}[W_s(T)]} - 1}}. \quad (89)$$

Como se asume $\mu > \delta$ (pues $r > 0$), los límites de $\mathbb{E}[W_s(T)]$, y de $\mathbb{E}[W(T)]$ cuando T tienden al infinito son iguales a infinito; además,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A(T)}{\mathbb{E}[W(T)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{\sigma^2} \frac{(e^\mu - 1)^2}{(e^{2\mu+\sigma^2} - 1)} \frac{(e^{(2\mu+\sigma^2)T} - 1)}{(e^{\mu T} - 1)^2} = \infty, \quad (90)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s(T)}{\mathbb{E}[W_s(T)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{\sigma^2} \frac{(e^{\mu-\delta} - 1)^2}{(e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1)} \frac{(e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)T} - 1)}{(e^{(\mu-\delta)T} - 1)^2} = \infty \quad (91)$$

Entonces, el límite de (89) cuando T tiende a infinito viene dado por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_s}{H_f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{(e^{\mu+\sigma^2}+1)}{(e^{\mu+\sigma^2}-1)} \frac{A(T)}{\mathbb{E}[W(T)]^2}}}{\sqrt{\frac{(e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}+1)}{(e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}-1)} \frac{A_s(T)}{\mathbb{E}[W_s(T)]^2}}}. \quad (92)$$

Luego, a partir de (92), y utilizando (90) y (91), se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_s}{H_f} = \frac{e^\mu - 1}{e^{\mu-\delta} - 1} \sqrt{\frac{(e^{\mu-\delta+\sigma^2} - 1)(e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1)(e^{\mu+\sigma^2} + 1)}{(e^{\mu+\sigma^2} - 1)(e^{2\mu+\sigma^2} - 1)(e^{\mu-\delta+\sigma^2} + 1)}} \times F \quad (93)$$

$$F = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(e^{(2\mu+\sigma^2)T} - 1)(e^{(\mu-\delta)T} - 1)^2}{(e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)T} - 1)(e^{\mu T} - 1)^2}} = 1. \quad (94)$$

Con lo cual,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_s}{H_f} = \frac{e^\mu - 1}{e^{\mu-\delta} - 1} \sqrt{\frac{(e^{\mu-\delta+\sigma^2} - 1)(e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1)(e^{\mu+\sigma^2} + 1)}{(e^{\mu+\sigma^2} - 1)(e^{2\mu+\sigma^2} - 1)(e^{\mu-\delta+\sigma^2} + 1)}}. \quad (95)$$

Es posible expresar RS_{sf} en (45) como

$$RS_{sf} = \frac{H_s}{H_f} \times \left(\frac{1 - \frac{\mathbb{E}[W_L(T)]}{\mathbb{E}[W_s(T)]}}{1 - \frac{\mathbb{E}[W_L(T)]}{\mathbb{E}[W(T)]}} \right). \quad (96)$$

Si $T \rightarrow \infty$ y $\mu - \delta > r$, entonces el límite de la expresión en paréntesis de (96) es igual a 1 con lo cual se demuestra el límite de la Proposición 3.1. Además, Chavez-Bedoya (2015a) demuestra que en ausencia de interrupciones $\frac{H_s}{H_f} > 1$ para cualquier escenario, lo cual concluye la demostración.

F. Figuras y Tablas

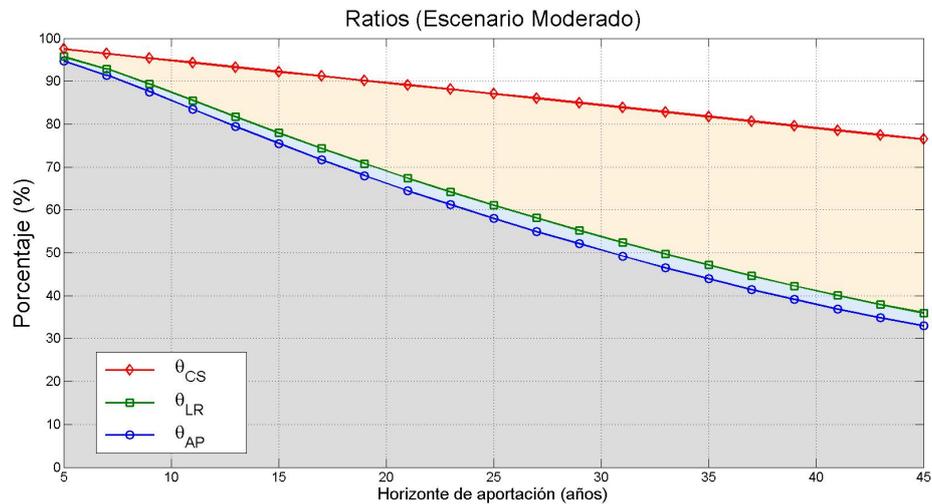


Figura 7: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario moderado (rentabilidad $r_M = 5,00\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

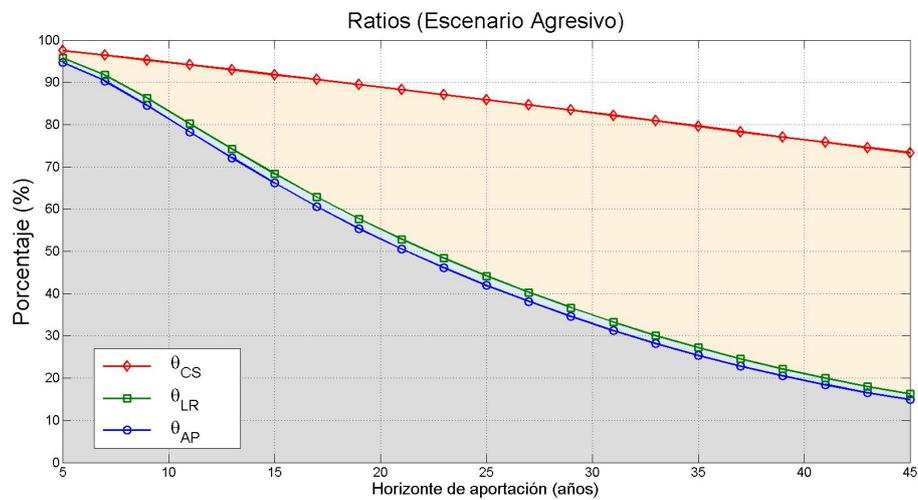


Figura 8: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario agresivo (rentabilidad $r_A = 7,30\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

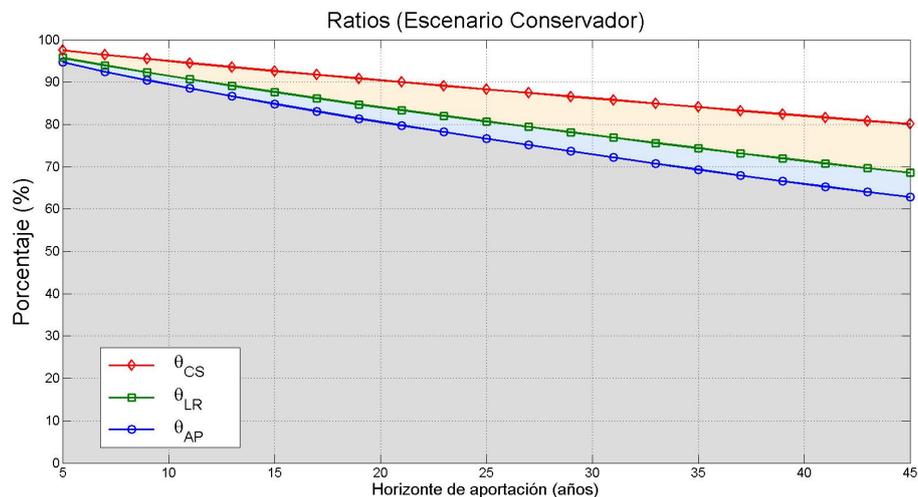


Figura 9: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} y θ_{CS} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario conservador (rentabilidad $r_C = 2,20\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

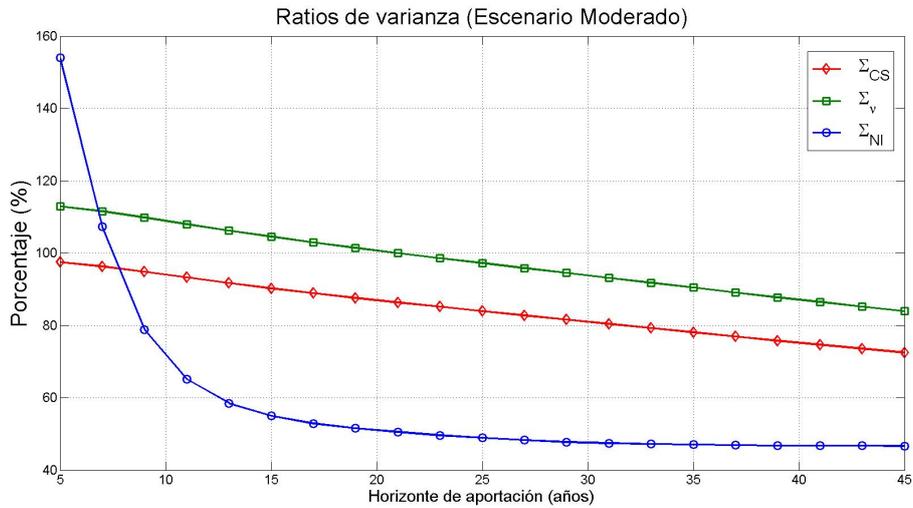


Figura 10: Ratios Σ_{CS} , Σ_v y Σ_{NI} (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo un escenario moderado (rentabilidad $r_M = 5,00\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

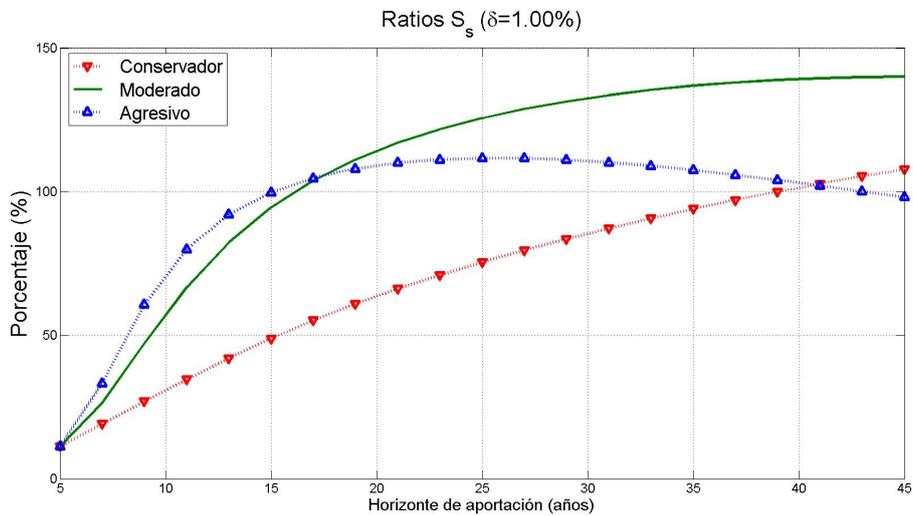


Figura 11: Ratio S_s (definido en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo tres escenarios de rentabilidad: moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual), agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual) y conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

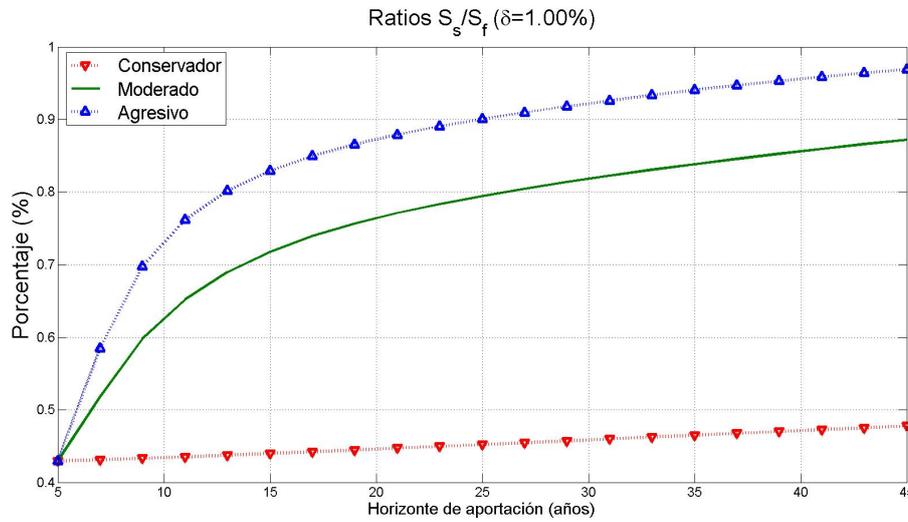


Figura 12: Ratio S_s/S_f (con S_s y S_f definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y bajo tres escenarios de rentabilidad: moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual), agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual) y conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual). Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, y $\delta = 1,00\%$ anual.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 14: Porcentaje anual de crecimiento real de los salarios del SPP

Edad	Mujer		Hombre	
	Sin universidad	Universidad	Sin universidad	Universidad
18 - 22	2.33 %	3.26 %	2.03 %	3.90 %
23 - 27	1.44 %	2.05 %	1.12 %	3.06 %
28 - 32	0.71 %	1.26 %	0.51 %	2.35 %
33 - 37	0.56 %	0.98 %	0.30 %	1.89 %
38 - 42	0.46 %	1.10 %	0.23 %	1.66 %
43 - 47	0.35 %	1.46 %	0.21 %	1.66 %
48 - 52	0.22 %	1.22 %	0.17 %	1.48 %
53 - 57	0.09 %	0.71 %	0.11 %	1.16 %
58 - 64	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %

Fuente: Base de datos trimestral del SPP Junio 2010-Setiembre 2012

Elaboración: El autor en base SBS (2013)

Tabla 15: Incrementos porcentuales anuales en salarios reales debido a ganancia en productividad para diferentes combinaciones de género/educación. Se incluye abreviación de dichos perfiles.

Género / Educación	Abreviación	Periodo		
		1-10 años	11-20 años	21 a más
Mujer / Sin universidad	<i>M/SU</i>	2.73 %	1.87 %	1.00 %
Mujer / Universidad	<i>M/U</i>	1.69 %	1.35 %	1.00 %
Hombre / Sin universidad	<i>H/SU</i>	3.52 %	2.26 %	1.00 %
Hombre / Universidad	<i>H/U</i>	0.63 %	0.82 %	1.00 %

Fuente: Encuesta Permanente de Empleo 2003-2012 (sólo primera columna)

Tabla 16: Densidad de cotización por grupo de edad.

Grupo de edad	Densidad de cotización (%)
< 21	44.6
21 - 25	46.8
26 - 30	46.0
31 - 35	46.0
36 - 40	45.1
41 - 45	46.0
46 - 50	48.0
51 - 55	48.2
56 - 60	47.5
61 - 65	40.0
Promedio	45.8

Fuente: Elaboración propia, en base a SBS (2013).

Tabla 17: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} , θ_{CS} , θ_{CF} , θ_V y θ_{NI} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,00\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último). Fuente: Elaboración propia.

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_V	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_V	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_V	θ_{NI}
5	94.7	95.7	97.5	84.2	112.9	40.1	94.7	95.7	97.5	84.2	112.9	40.1	94.7	95.7	97.5	84.2	112.9	40.1
7	91.4	92.9	96.4	84.2	111.7	42.3	90.3	91.8	96.4	84.2	111.6	42.3	92.5	93.9	96.5	84.2	111.7	42.2
9	87.5	89.3	95.4	84.2	110.4	43.5	84.5	86.2	95.3	84.2	110.3	43.6	90.4	92.3	95.5	84.2	110.5	43.4
11	83.5	85.5	94.3	84.2	109.2	44.3	78.3	80.2	94.1	84.2	109.0	44.5	88.5	90.7	94.5	84.2	109.4	44.2
13	79.4	81.7	93.3	84.2	108.0	45.0	72.1	74.2	93.0	84.2	107.7	45.3	86.6	89.1	93.6	84.2	108.3	44.8
15	75.5	78.0	92.2	84.2	106.8	45.5	66.2	68.4	91.8	84.2	106.3	45.8	84.8	87.6	92.6	84.2	107.3	45.2
17	71.6	74.3	91.2	84.2	105.6	45.9	60.6	62.9	90.6	84.2	105.0	46.2	83.1	86.2	91.7	84.2	106.2	45.6
19	68.0	70.8	90.1	84.2	104.4	46.2	55.3	57.6	89.4	84.2	103.6	46.5	81.4	84.7	90.8	84.2	105.2	45.8
21	64.5	67.4	89.1	84.2	103.2	46.3	50.5	52.8	88.3	84.2	102.2	46.6	79.8	83.4	90.0	84.2	104.2	46.0
23	61.2	64.2	88.1	84.2	102.0	46.3	46.1	48.4	87.1	84.2	100.8	46.5	78.2	82.0	89.1	84.2	103.2	46.0
25	58.0	61.1	87.1	84.2	100.8	46.3	41.9	44.2	85.9	84.2	99.4	46.5	76.6	80.7	88.3	84.2	102.2	46.0
27	55.0	58.2	86.0	84.2	99.6	46.2	38.1	40.3	84.6	84.2	98.0	46.3	75.1	79.4	87.4	84.2	101.3	46.0
29	52.1	55.3	85.0	84.2	98.4	46.1	34.6	36.7	83.4	84.2	96.6	46.1	73.7	78.2	86.6	84.2	100.3	45.9
31	49.3	52.5	83.9	84.2	97.2	46.0	31.2	33.3	82.1	84.2	95.1	46.1	72.2	76.9	85.8	84.2	99.3	45.9
33	46.5	49.7	82.8	84.2	95.9	46.0	28.2	30.1	80.9	84.2	93.6	46.1	70.7	75.6	84.9	84.2	98.3	45.9
35	43.9	47.1	81.8	84.2	94.7	46.0	25.4	27.2	79.6	84.2	92.2	46.0	69.3	74.4	84.1	84.2	97.4	45.9
37	41.5	44.7	80.7	84.2	93.4	46.0	22.8	24.6	78.3	84.2	90.7	46.0	67.9	73.2	83.3	84.2	96.4	45.9
39	39.1	42.3	79.6	84.2	92.2	46.0	20.5	22.2	77.0	84.2	89.2	46.0	66.6	72.0	82.4	84.2	95.5	45.9
41	36.9	40.1	78.5	84.2	90.9	46.0	18.4	20.0	75.8	84.2	87.8	46.1	65.3	70.8	81.6	84.2	94.5	46.0
43	34.9	37.9	77.5	84.2	89.7	46.1	16.5	18.0	74.5	84.2	86.3	46.2	64.0	69.7	80.8	84.2	93.6	46.0
45	33.0	36.0	76.4	84.2	88.5	46.1	14.9	16.3	73.3	84.2	84.9	46.1	62.8	68.6	80.1	84.2	92.7	46.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 18: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} , θ_{CS} , θ_{CF} , θ_V y θ_{NI} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 0,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último).

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_V	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_V	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_V	θ_{NI}
5	94.7	95.7	98.7	84.2	114.3	40.1	94.7	95.7	98.7	84.2	114.3	40.1	94.7	95.7	98.7	84.2	114.3	40.1
7	91.4	92.9	98.2	84.2	113.7	42.3	90.3	91.8	98.2	84.2	113.7	42.3	92.5	93.9	98.2	84.2	113.7	42.2
9	87.5	89.3	97.6	84.2	113.1	43.5	84.5	86.2	97.6	84.2	113.0	43.6	90.4	92.3	97.7	84.2	113.1	43.4
11	83.5	85.5	97.1	84.2	112.4	44.3	78.3	80.2	97.0	84.2	112.3	44.5	88.5	90.7	97.2	84.2	112.6	44.2
13	79.4	81.7	96.6	84.2	111.8	45.0	72.1	74.2	96.4	84.2	111.6	45.3	86.6	89.1	96.7	84.2	112.0	44.8
15	75.5	78.0	96.0	84.2	111.2	45.5	66.2	68.4	95.8	84.2	110.9	45.8	84.8	87.6	96.2	84.2	111.4	45.2
17	71.6	74.3	95.5	84.2	110.5	45.9	60.6	62.9	95.2	84.2	110.2	46.2	83.1	86.2	95.7	84.2	110.9	45.6
19	68.0	70.8	94.9	84.2	109.9	46.2	55.3	57.6	94.5	84.2	109.5	46.5	81.4	84.7	95.3	84.2	110.3	45.8
21	64.5	67.4	94.4	84.2	109.3	46.3	50.5	52.8	93.9	84.2	108.7	46.6	79.8	83.4	94.8	84.2	109.8	46.0
23	61.2	64.2	93.8	84.2	108.6	46.3	46.1	48.4	93.3	84.2	108.0	46.5	78.2	82.0	94.3	84.2	109.3	46.0
25	58.0	61.1	93.2	84.2	108.0	46.3	41.9	44.2	92.6	84.2	107.2	46.5	76.6	80.7	93.9	84.2	108.7	46.0
27	55.0	58.2	92.7	84.2	107.3	46.2	38.1	40.3	91.9	84.2	106.4	46.3	75.1	79.4	93.4	84.2	108.2	46.0
29	52.1	55.3	92.1	84.2	106.6	46.1	34.6	36.7	91.2	84.2	105.7	46.1	73.7	78.2	93.0	84.2	107.7	45.9
31	49.3	52.5	91.5	84.2	106.0	46.0	31.2	33.3	90.5	84.2	104.8	46.1	72.2	76.9	92.5	84.2	107.1	45.9
33	46.5	49.7	90.9	84.2	105.3	46.0	28.2	30.1	89.8	84.2	104.0	46.1	70.7	75.6	92.0	84.2	106.6	45.9
35	43.9	47.1	90.3	84.2	104.6	46.0	25.4	27.2	89.1	84.2	103.2	46.0	69.3	74.4	91.6	84.2	106.0	45.9
37	41.5	44.7	89.7	84.2	103.9	46.0	22.8	24.6	88.4	84.2	102.3	46.0	67.9	73.2	91.1	84.2	105.5	45.9
39	39.1	42.3	89.1	84.2	103.1	46.0	20.5	22.2	87.6	84.2	101.5	46.0	66.6	72.0	90.6	84.2	105.0	45.9
41	36.9	40.1	88.5	84.2	102.4	46.0	18.4	20.0	86.9	84.2	100.6	46.1	65.3	70.8	90.2	84.2	104.4	46.0
43	34.9	37.9	87.8	84.2	101.7	46.1	16.5	18.0	86.2	84.2	99.8	46.2	64.0	69.7	89.7	84.2	103.9	46.0
45	33.0	36.0	87.3	84.2	101.0	46.1	14.9	16.3	85.5	84.2	99.0	46.1	62.8	68.6	89.3	84.2	103.4	46.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 19: Ratios θ_{AP} , θ_{LR} , θ_{CS} , θ_{CF} , θ_{NI} (definidos en la Sección 3.2.1) en porcentaje (%) para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último).

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)					Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)					Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)							
	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{NI}	θ_{AP}	θ_{LR}	θ_{CS}	θ_{CF}	θ_{NI}			
5	94.7	95.7	96.3	84.2	111.5	40.1	94.7	95.7	96.3	84.2	111.5	40.1	94.7	95.7	96.3	84.2	111.5	40.1
7	91.4	92.9	94.7	84.2	109.7	42.3	90.3	91.8	94.7	84.2	109.6	42.3	92.5	93.9	94.7	84.2	109.7	42.2
9	87.5	89.3	93.2	84.2	107.9	43.5	84.5	86.2	93.0	84.2	107.7	43.6	90.4	92.3	93.3	84.2	108.0	43.4
11	83.5	85.5	91.7	84.2	106.1	44.3	78.3	80.2	91.4	84.2	105.8	44.5	88.5	90.7	91.9	84.2	106.4	44.2
13	79.4	81.7	90.2	84.2	104.4	45.0	72.1	74.2	89.7	84.2	103.9	45.3	86.6	89.1	90.6	84.2	104.9	44.8
15	75.5	78.0	88.7	84.2	102.7	45.5	66.2	68.4	88.1	84.2	102.0	45.8	84.8	87.6	89.2	84.2	103.3	45.2
17	71.6	74.3	87.2	84.2	101.0	45.9	60.6	62.9	86.4	84.2	100.0	46.2	83.1	86.2	88.0	84.2	101.8	45.6
19	68.0	70.8	85.7	84.2	99.2	46.2	55.3	57.6	84.7	84.2	98.1	46.5	81.4	84.7	86.7	84.2	100.4	45.8
21	64.5	67.4	84.3	84.2	97.6	46.3	50.5	52.8	83.1	84.2	96.2	46.6	79.8	83.4	85.5	84.2	99.0	46.0
23	61.2	64.2	82.8	84.2	95.9	46.3	46.1	48.4	81.4	84.2	94.3	46.5	78.2	82.0	84.3	84.2	97.6	46.0
25	58.0	61.1	81.4	84.2	94.3	46.3	41.9	44.2	79.7	84.2	92.3	46.5	76.6	80.7	83.1	84.2	96.2	46.0
27	55.0	58.2	80.0	84.2	92.6	46.2	38.1	40.3	78.1	84.2	90.4	46.3	75.1	79.4	82.0	84.2	94.9	46.0
29	52.1	55.3	78.6	84.2	91.0	46.1	34.6	36.7	76.4	84.2	88.4	46.1	73.7	78.2	80.8	84.2	93.6	45.9
31	49.3	52.5	77.1	84.2	89.3	46.0	31.2	33.3	74.7	84.2	86.5	46.1	72.2	76.9	79.7	84.2	92.3	45.9
33	46.5	49.7	75.7	84.2	87.6	46.0	28.2	30.1	73.0	84.2	84.5	46.1	70.7	75.6	78.5	84.2	90.9	45.9
35	43.9	47.1	74.2	84.2	85.9	46.0	25.4	27.2	71.3	84.2	82.5	46.0	69.3	74.4	77.4	84.2	89.6	45.9
37	41.5	44.7	72.8	84.2	84.3	46.0	22.8	24.6	69.6	84.2	80.6	46.0	67.9	73.2	76.3	84.2	88.4	45.9
39	39.1	42.3	71.4	84.2	82.6	46.0	20.5	22.2	67.9	84.2	78.7	46.0	66.6	72.0	75.2	84.2	87.1	45.9
41	36.9	40.1	70.0	84.2	81.0	46.0	18.4	20.0	66.3	84.2	76.8	46.1	65.3	70.8	74.2	84.2	85.9	46.0
43	34.9	37.9	68.6	84.2	79.4	46.1	16.5	18.0	64.7	84.2	74.9	46.2	64.0	69.7	73.1	84.2	84.7	46.0
45	33.0	36.0	67.3	84.2	77.9	46.1	14.9	16.3	63.1	84.2	73.1	46.1	62.8	68.6	72.1	84.2	83.5	46.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 20: Pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, $1 - \theta_{CS}$, con θ_{CS} definido en (37) cuando $\delta = 1,00\%$ anual. Se han considerado diferentes horizontes de aportación en años (T), los escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1, y los perfiles de aportes de la Tabla 15 (además de el perfil E que consiste en aportes reales iguales). La densidad de cotización está determinada por la Tabla 16

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)				Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)				Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)						
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
7	3.6	3.6	3.5	3.7	3.7	3.6	3.7	3.6	3.7	3.7	3.5	3.6	3.5	3.6	3.7
9	4.6	4.7	4.6	4.8	4.8	4.7	4.8	4.7	4.8	4.9	4.5	4.6	4.5	4.7	4.7
11	5.7	5.7	5.6	5.8	5.9	5.9	5.9	5.8	6.0	6.1	5.5	5.6	5.4	5.7	5.7
13	6.7	6.8	6.6	6.9	7.1	7.0	7.1	6.9	7.2	7.4	6.4	6.5	6.3	6.6	6.8
15	7.8	7.9	7.7	8.0	8.2	8.2	8.3	8.1	8.4	8.6	7.4	7.5	7.3	7.6	7.8
17	8.8	8.9	8.7	9.0	9.3	9.4	9.4	9.2	9.6	9.9	8.3	8.3	8.1	8.5	8.8
19	9.9	9.9	9.7	10.1	10.5	10.6	10.6	10.4	10.8	11.2	9.2	9.2	9.0	9.4	9.8
21	10.9	10.9	10.7	11.1	11.6	11.7	11.8	11.6	11.9	12.5	10.0	10.1	9.9	10.2	10.8
23	11.9	11.9	11.7	12.1	12.8	12.9	12.9	12.8	13.1	13.7	10.9	10.9	10.7	11.1	11.7
25	12.9	12.9	12.8	13.1	13.9	14.1	14.1	14.0	14.3	15.1	11.7	11.7	11.5	11.9	12.7
27	14.0	13.9	13.8	14.1	15.1	15.4	15.3	15.2	15.5	16.4	12.6	12.5	12.4	12.7	13.7
29	15.0	14.9	14.8	15.1	16.2	16.6	16.5	16.4	16.7	17.7	13.4	13.3	13.2	13.4	14.6
31	16.1	16.0	15.9	16.1	17.4	17.9	17.8	17.7	17.9	19.0	14.2	14.1	14.1	14.2	15.6
33	17.2	17.0	17.0	17.1	18.6	19.1	19.0	19.0	19.1	20.4	15.1	14.9	14.9	15.0	16.6
35	18.2	18.1	18.1	18.1	19.8	20.4	20.3	20.2	20.3	21.8	15.9	15.7	15.8	15.7	17.5
37	19.3	19.1	19.2	19.1	21.0	21.7	21.5	21.5	21.5	23.1	16.7	16.5	16.6	16.4	18.5
39	20.4	20.1	20.3	20.1	22.2	23.0	22.8	22.8	22.7	24.5	17.6	17.2	17.4	17.1	19.5
41	21.5	21.2	21.3	21.0	23.4	24.2	24.0	24.1	23.9	25.9	18.4	18.0	18.3	17.8	20.4
43	22.5	22.2	22.4	22.0	24.7	25.5	25.3	25.4	25.1	27.2	19.2	18.7	19.1	18.5	21.4
45	23.6	23.2	23.5	22.9	25.8	26.7	26.4	26.6	26.2	28.5	19.9	19.4	19.9	19.1	22.4

Fuente: Elaboración propia

Tabla 21: Pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, $1 - \theta_{CS}$, con θ_{CS} definido en (37) cuando $\delta = 0,5\%$ anual. Se han considerado diferentes horizontes de aportación en años (T), los escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1, y los perfiles de aportes de la Tabla 15 (además de el perfil E que consiste en aportes reales iguales). La densidad de cotización está determinada por la Tabla 16

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)			Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)			Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)								
	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E	M/SU	M/U	H/SU	H/U	E
5	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3
7	1.8	1.8	1.8	1.9	1.9	1.9	1.8	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.9
9	2.4	2.4	2.3	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.5	2.5	2.3	2.3	2.3	2.4	2.4
11	2.9	2.9	2.9	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.1	3.1	2.8	2.8	2.8	2.9	2.9
13	3.4	3.5	3.4	3.5	3.6	3.6	3.6	3.5	3.7	3.8	3.3	3.3	3.2	3.4	3.5
15	4.0	4.0	3.9	4.1	4.2	4.2	4.2	4.1	4.3	4.4	3.8	3.8	3.7	3.9	4.0
17	4.5	4.6	4.5	4.7	4.8	4.8	4.8	4.8	4.9	5.1	4.3	4.3	4.2	4.4	4.5
19	5.1	5.1	5.0	5.2	5.4	5.4	5.5	5.4	5.6	5.8	4.7	4.8	4.7	4.8	5.1
21	5.6	5.7	5.6	5.8	6.0	6.0	6.1	6.0	6.2	6.5	5.2	5.2	5.1	5.3	5.6
23	6.2	6.2	6.1	6.3	6.7	6.7	6.7	6.7	6.8	7.2	5.7	5.7	5.6	5.7	6.1
25	6.8	6.8	6.7	6.8	7.3	7.3	7.4	7.3	7.5	7.9	6.1	6.1	6.0	6.2	6.6
27	7.3	7.3	7.2	7.4	7.9	7.9	8.1	8.0	8.1	8.6	6.6	6.5	6.5	6.6	7.2
29	7.9	7.9	7.8	7.9	8.6	8.6	8.8	8.7	8.8	9.4	7.0	7.0	6.9	7.0	7.7
31	8.5	8.4	8.4	8.5	9.2	9.2	9.5	9.4	9.5	10.1	7.5	7.4	7.4	7.5	8.2
33	9.1	9.0	9.0	9.1	9.9	9.9	10.2	10.1	10.1	10.9	8.0	7.9	7.9	7.9	8.8
35	9.7	9.6	9.6	9.6	10.6	10.6	10.9	10.8	10.8	11.7	8.4	8.3	8.3	8.3	9.3
37	10.3	10.2	10.2	10.2	11.3	11.3	11.6	11.5	11.5	12.4	8.9	8.7	8.8	8.7	9.9
39	10.9	10.8	10.8	10.7	11.9	11.9	12.4	12.3	12.2	13.2	9.4	9.2	9.3	9.1	10.4
41	11.5	11.4	11.5	11.3	12.7	12.7	13.1	13.0	12.9	14.0	9.8	9.6	9.8	9.5	11.0
43	12.2	12.0	12.1	11.8	13.4	13.4	13.8	13.7	13.6	14.8	10.3	10.0	10.2	9.9	11.5
45	12.7	12.5	12.7	12.4	14.1	14.1	14.5	14.4	14.3	15.6	10.7	10.4	10.7	10.2	12.1

Fuente: Elaboración propia

Tabla 22: Pérdida porcentual de riqueza terminal esperada debido a comisión por saldo, $1 - \theta_{CS}$, con θ_{CS} definido en (37) cuando $\delta = 1,50\%$ anual. Se han considerado diferentes horizontes de aportación en años (T), los escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1, y los perfiles de aportes de la Tabla 15 (además de el perfil E que consiste en aportes reales iguales). La densidad de cotización está determinada por la Tabla 16

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)			Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)			Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)						
	M/SU	M/U	H/U	M/SU	M/U	H/U	M/SU	M/U	H/U	M/SU	M/U	H/U	E
5	3.7	3.7	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7	3.7	3.8	3.7	3.7	3.8	3.8
7	5.3	5.4	5.2	5.4	5.5	5.5	5.3	5.4	5.5	5.3	5.3	5.2	5.4
9	6.8	6.9	6.8	7.0	7.1	7.2	7.0	7.1	7.2	6.7	6.8	6.6	6.9
11	8.3	8.4	8.2	8.6	8.7	8.7	8.6	8.7	8.8	8.1	8.2	8.0	8.4
13	9.8	10.0	9.7	10.1	10.3	10.3	10.3	10.4	10.5	9.4	9.6	9.3	9.9
15	11.3	11.5	11.2	11.6	12.0	12.0	11.9	12.1	12.2	10.8	10.9	10.6	11.4
17	12.8	12.9	12.6	13.1	13.6	13.6	13.6	13.7	13.9	12.0	12.2	11.9	12.8
19	14.3	14.4	14.1	14.6	15.2	15.2	15.3	15.4	15.6	13.3	13.4	13.1	14.2
21	15.7	15.8	15.5	16.0	16.8	16.8	16.9	17.0	17.2	14.5	14.6	14.3	15.6
23	17.2	17.2	16.9	17.4	18.4	18.4	18.6	18.6	18.8	15.7	15.7	15.5	16.9
25	18.6	18.6	18.3	18.8	19.9	19.9	20.3	20.2	20.0	16.9	16.8	16.6	18.2
27	20.0	19.9	19.7	20.2	21.5	21.5	21.9	21.9	21.7	18.0	17.9	17.8	19.6
29	21.4	21.3	21.2	21.5	23.1	23.1	23.6	23.5	23.4	19.2	19.0	18.9	20.9
31	22.9	22.7	22.6	22.9	24.7	24.7	25.3	25.2	25.1	20.3	20.1	20.1	22.2
33	24.3	24.1	24.1	24.2	26.3	26.3	27.0	26.9	26.8	21.5	21.2	21.2	23.5
35	25.8	25.5	25.6	25.6	27.9	27.9	28.7	28.6	28.5	22.6	22.3	22.4	24.8
37	27.2	26.9	27.0	26.9	29.5	29.5	30.4	30.2	30.2	23.7	23.3	23.5	26.1
39	28.6	28.3	28.4	28.2	31.1	31.1	32.1	31.9	31.9	24.8	24.3	24.6	27.4
41	30.0	29.6	29.9	29.4	32.7	32.7	33.7	33.5	33.5	25.8	25.3	25.7	28.6
43	31.4	31.0	31.3	30.6	34.2	34.2	35.3	35.1	35.2	26.9	26.3	26.8	29.9
45	32.7	32.2	32.6	31.8	35.8	35.8	36.9	36.6	36.7	27.9	27.2	27.8	31.1

Fuente: Elaboración propia

Tabla 23: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje ($\%$) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,00\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	97.5	112.9	154.0	11.2	26.2	0.43	97.5	112.9	154.0	11.2	26.2	0.43	97.5	112.9	154.0	11.2	26.2	0.43
7	96.3	111.5	107.2	26.4	51.0	0.52	96.1	111.3	95.1	33.2	56.8	0.59	96.4	111.7	115.7	19.0	44.2	0.43
9	94.8	109.8	78.8	47.2	78.9	0.60	94.2	109.1	65.5	60.6	86.9	0.70	95.4	110.5	95.2	26.9	62.1	0.43
11	93.3	108.0	65.1	66.6	102.2	0.65	92.4	107.0	56.0	79.9	104.9	0.76	94.3	109.2	82.8	34.6	79.5	0.44
13	91.7	106.2	58.5	82.3	119.4	0.69	90.8	105.2	52.4	92.0	114.7	0.80	93.2	107.9	74.7	41.9	95.9	0.44
15	90.3	104.5	55.0	94.5	131.6	0.72	89.4	103.5	50.8	99.7	120.2	0.83	92.1	106.6	69.0	48.8	110.9	0.44
17	88.9	102.9	52.9	103.8	140.4	0.74	88.0	101.9	49.9	104.7	123.2	0.85	91.0	105.3	65.0	55.1	124.6	0.44
19	87.6	101.4	51.6	111.2	146.9	0.76	86.7	100.4	49.4	108.0	124.7	0.87	89.9	104.1	62.0	60.9	137.0	0.44
21	86.3	100.0	50.5	117.0	151.7	0.77	85.4	98.9	48.8	110.0	125.2	0.88	88.8	102.8	59.6	66.2	148.0	0.45
23	85.1	98.6	49.6	121.6	155.3	0.78	84.2	97.5	48.2	111.2	124.9	0.89	87.7	101.6	57.6	71.0	157.8	0.45
25	83.9	97.2	48.9	125.5	158.0	0.79	82.9	96.0	47.7	111.7	124.0	0.90	86.6	100.3	56.0	75.4	166.9	0.45
27	82.8	95.9	48.3	128.7	160.0	0.80	81.6	94.6	47.2	111.6	122.7	0.91	85.6	99.1	54.6	79.6	175.0	0.45
29	81.6	94.5	47.8	131.4	161.5	0.81	80.4	93.1	46.8	111.1	121.0	0.92	84.6	97.9	53.4	83.5	182.5	0.46
31	80.4	93.1	47.4	133.6	162.5	0.82	79.1	91.6	46.6	110.2	119.0	0.93	83.5	96.7	52.5	87.2	189.5	0.46
33	79.3	91.8	47.2	135.4	163.0	0.83	77.8	90.1	46.5	109.0	116.7	0.93	82.5	95.5	51.8	90.7	196.1	0.46
35	78.1	90.4	47.0	136.9	163.3	0.84	76.5	88.6	46.4	107.5	114.3	0.94	81.4	94.3	51.2	93.9	202.0	0.46
37	76.9	89.1	46.9	138.0	163.2	0.85	75.2	87.1	46.3	105.8	111.8	0.95	80.4	93.1	50.6	97.1	207.6	0.47
39	75.8	87.8	46.8	138.9	162.8	0.85	74.0	85.7	46.3	104.0	109.2	0.95	79.4	92.0	50.2	100.0	212.6	0.47
41	74.7	86.5	46.7	139.5	162.2	0.86	72.7	84.2	46.3	102.1	106.5	0.96	78.5	90.9	49.8	102.7	217.3	0.47
43	73.6	85.2	46.7	139.9	161.5	0.87	71.5	82.8	46.4	100.1	103.9	0.96	77.5	89.7	49.5	105.3	221.6	0.48
45	72.5	83.9	46.6	140.1	160.6	0.87	70.3	81.5	46.3	98.2	101.3	0.97	76.6	88.7	49.2	107.7	225.5	0.48

Fuente: Elaboración propia

Tabla 24: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 0,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	98.7	114.3	154.0	18.7	26.2	0.72	98.7	114.3	154.0	18.7	26.2	0.72	98.7	114.3	154.0	18.7	26.2	0.72
7	98.1	113.6	107.2	38.8	51.0	0.76	98.0	113.5	95.1	45.0	56.8	0.79	98.2	113.7	115.7	31.7	44.2	0.72
9	97.4	112.8	78.8	63.2	78.9	0.80	97.0	112.4	65.5	73.9	86.9	0.85	97.6	113.1	95.2	44.6	62.1	0.72
11	96.5	111.8	65.1	84.7	102.2	0.83	96.1	111.3	56.0	92.6	104.9	0.88	97.1	112.4	82.8	57.2	79.5	0.72
13	95.7	110.9	58.5	101.2	119.4	0.85	95.3	110.3	52.4	103.6	114.7	0.90	96.5	111.8	74.7	69.2	95.9	0.72
15	95.0	110.0	55.0	113.5	131.6	0.86	94.5	109.5	50.8	110.3	120.2	0.92	95.9	111.1	69.0	80.3	110.9	0.72
17	94.2	109.1	52.9	122.7	140.4	0.87	93.8	108.6	49.9	114.3	123.2	0.93	95.3	110.4	65.0	90.5	124.6	0.73
19	93.5	108.3	51.6	129.6	146.9	0.88	93.1	107.8	49.4	116.7	124.7	0.94	94.7	109.7	62.0	99.8	137.0	0.73
21	92.9	107.6	50.5	135.0	151.7	0.89	92.4	107.0	48.8	117.9	125.2	0.94	94.2	109.0	59.6	108.0	148.0	0.73
23	92.2	106.8	49.6	139.2	155.3	0.90	91.7	106.2	48.2	118.4	124.9	0.95	93.6	108.4	57.6	115.6	157.8	0.73
25	91.6	106.0	48.9	142.5	158.0	0.90	91.0	105.4	47.7	118.2	124.0	0.95	93.0	107.7	56.0	122.5	166.9	0.73
27	90.9	105.3	48.3	145.2	160.0	0.91	90.3	104.6	47.2	117.5	122.7	0.96	92.4	107.0	54.6	128.9	175.0	0.74
29	90.3	104.5	47.8	147.3	161.5	0.91	89.6	103.8	46.8	116.4	121.0	0.96	91.8	106.4	53.4	134.8	182.5	0.74
31	89.6	103.8	47.4	148.9	162.5	0.92	88.9	102.9	46.6	114.9	119.0	0.97	91.3	105.7	52.5	140.4	189.5	0.74
33	88.9	103.0	47.2	150.1	163.0	0.92	88.1	102.1	46.5	113.2	116.7	0.97	90.7	105.0	51.8	145.6	196.1	0.74
35	88.3	102.2	47.0	151.0	163.3	0.92	87.4	101.2	46.4	111.2	114.3	0.97	90.1	104.3	51.2	150.5	202.0	0.74
37	87.6	101.5	46.9	151.5	163.2	0.93	86.7	100.4	46.3	109.1	111.8	0.98	89.5	103.7	50.6	155.0	207.6	0.75
39	87.0	100.7	46.8	151.8	162.8	0.93	85.9	99.5	46.3	106.9	109.2	0.98	89.0	103.0	50.2	159.2	212.6	0.75
41	86.3	99.9	46.7	151.8	162.2	0.94	85.2	98.7	46.3	104.6	106.5	0.98	88.4	102.4	49.8	163.2	217.3	0.75
43	85.6	99.2	46.7	151.6	161.5	0.94	84.5	97.8	46.4	102.3	103.9	0.98	87.9	101.7	49.5	166.9	221.6	0.75
45	85.0	98.4	46.6	151.3	160.6	0.94	83.8	97.0	46.3	100.0	101.3	0.99	87.3	101.1	49.2	170.2	225.5	0.75

Fuente: Elaboración propia

Tabla 25: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización de la Tabla 16, $\delta = 1,50\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T (años)	<i>Moderado</i> ($r_M = 5,00\%$ real anual)					<i>Agresivo</i> ($r_A = 7,30\%$ real anual)					<i>Conservador</i> ($r_C = 2,20\%$ real anual)							
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	96.3	111.5	154.0	3.7	26.2	0.14	96.3	111.5	154.0	3.7	26.2	0.14	96.3	111.5	154.0	3.7	26.2	0.14
7	94.6	109.5	107.2	13.9	51.0	0.27	94.2	109.1	95.1	21.2	56.8	0.37	94.8	109.7	115.7	6.3	44.2	0.14
9	92.4	107.0	78.8	30.9	78.9	0.39	91.5	105.9	65.5	47.0	86.9	0.54	93.2	107.9	95.2	9.0	62.1	0.14
11	90.1	104.4	65.1	48.1	102.2	0.47	88.8	102.9	56.0	66.7	104.9	0.64	91.7	106.1	82.8	11.5	79.5	0.15
13	87.9	101.8	58.5	62.7	119.4	0.53	86.6	100.3	52.4	79.8	114.7	0.70	90.1	104.3	74.7	14.0	95.9	0.15
15	85.8	99.4	55.0	74.5	131.6	0.57	84.6	97.9	50.8	88.5	120.2	0.74	88.5	102.5	69.0	16.4	110.9	0.15
17	83.9	97.2	52.9	83.8	140.4	0.60	82.7	95.7	49.9	94.4	123.2	0.77	86.9	100.6	65.0	18.5	124.6	0.15
19	82.1	95.1	51.6	91.4	146.9	0.62	80.8	93.6	49.4	98.6	124.7	0.79	85.3	98.8	62.0	20.5	137.0	0.15
21	80.4	93.1	50.5	97.6	151.7	0.64	79.1	91.6	48.8	101.4	125.2	0.81	83.8	97.1	59.6	22.4	148.0	0.15
23	78.7	91.1	49.6	102.7	155.3	0.66	77.3	89.6	48.2	103.3	124.9	0.83	82.3	95.4	57.6	24.1	157.8	0.15
25	77.1	89.2	48.9	107.0	158.0	0.68	75.6	87.6	47.7	104.4	124.0	0.84	80.9	93.7	56.0	25.7	166.9	0.15
27	75.5	87.4	48.3	110.6	160.0	0.69	73.9	85.6	47.2	105.0	122.7	0.86	79.4	92.0	54.6	27.1	175.0	0.16
29	73.9	85.6	47.8	113.8	161.5	0.70	72.2	83.6	46.8	105.1	121.0	0.87	78.0	90.4	53.4	28.5	182.5	0.16
31	72.3	83.8	47.4	116.5	162.5	0.72	70.5	81.6	46.6	104.8	119.0	0.88	76.6	88.7	52.5	29.9	189.5	0.16
33	70.8	81.9	47.2	118.8	163.0	0.73	68.8	79.7	46.5	104.1	116.7	0.89	75.2	87.1	51.8	31.2	196.1	0.16
35	69.2	80.2	47.0	120.8	163.3	0.74	67.1	77.7	46.4	103.1	114.3	0.90	73.8	85.5	51.2	32.4	202.0	0.16
37	67.7	78.4	46.9	122.5	163.2	0.75	65.4	75.8	46.3	101.9	111.8	0.91	72.5	84.0	50.6	33.5	207.6	0.16
39	66.2	76.7	46.8	123.8	162.8	0.76	63.8	73.9	46.3	100.6	109.2	0.92	71.2	82.4	50.2	34.6	212.6	0.16
41	64.8	75.0	46.7	125.0	162.2	0.77	62.2	72.1	46.3	99.1	106.5	0.93	69.9	81.0	49.8	35.7	217.3	0.16
43	63.3	73.4	46.7	125.9	161.5	0.78	60.7	70.3	46.4	97.4	103.9	0.94	68.7	79.5	49.5	36.7	221.6	0.17
45	62.0	71.8	46.6	126.6	160.6	0.79	59.2	68.6	46.3	95.8	101.3	0.95	67.5	78.2	49.2	37.6	225.5	0.17

Fuente: Elaboración propia

Tabla 26: Ratios Σ_{CS} , Σ_{ν} , Σ_{NI} , S_s y S_f (definidos en la Sección 3.3.1) en porcentaje (%) y S_s/S_f para diferentes horizontes de aportación en años (T) y escenarios de rentabilidad de la Sección 3.1.1. Se han considerado el perfil de aportes M/SU de la Tabla 15, la densidad de cotización se asume 100% (no interrupciones), $\delta = 1,00\%$ anual y $\alpha = 0,172$ (corresponde a un cargo por flujo igual a 1.58% del salario bajo una tasa de contribución constante de 10% de este último)

T (años)	Moderado ($r_M = 5,00\%$ real anual)						Agresivo ($r_A = 7,30\%$ real anual)						Conservador ($r_C = 2,20\%$ real anual)					
	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f	Σ_{CS}	Σ_{ν}	Σ_{NI}	S_s	S_f	S_s/S_f
5	96.9	112.2	100.0	43.3	100.1	0.43	96.9	112.2	100.0	43.3	100.1	0.43	96.9	112.2	100.0	43.3	100.1	0.43
7	95.4	110.5	100.0	63.8	123.5	0.52	95.0	110.0	100.0	70.4	120.7	0.58	95.7	110.9	100.0	50.8	116.9	0.43
9	93.8	108.6	100.0	81.3	135.6	0.60	93.2	108.0	100.0	85.9	123.1	0.70	94.6	109.5	100.0	57.2	130.9	0.44
11	92.3	106.9	100.0	93.3	142.6	0.65	91.8	106.3	100.0	95.2	124.9	0.76	93.4	108.2	100.0	62.8	142.9	0.44
13	91.0	105.4	100.0	102.3	147.9	0.69	90.5	104.8	100.0	101.6	126.8	0.80	92.3	106.9	100.0	67.8	153.5	0.44
15	89.7	103.9	100.0	109.5	152.3	0.72	89.2	103.3	100.0	106.1	128.1	0.83	91.2	105.6	100.0	72.4	163.0	0.44
17	88.5	102.5	100.0	115.4	155.9	0.74	87.9	101.8	100.0	109.3	128.8	0.85	90.1	104.3	100.0	76.6	171.5	0.45
19	87.3	101.1	100.0	120.3	158.8	0.76	86.7	100.3	100.0	111.4	128.8	0.87	89.0	103.1	100.0	80.5	179.3	0.45
21	86.1	99.7	100.0	124.4	161.2	0.77	85.4	98.9	100.0	112.7	128.3	0.88	87.9	101.8	100.0	84.2	186.4	0.45
23	84.9	98.3	100.0	127.9	163.0	0.78	84.1	97.4	100.0	113.3	127.3	0.89	86.9	100.6	100.0	87.6	192.9	0.45
25	83.7	97.0	100.0	130.8	164.4	0.80	82.8	95.9	100.0	113.4	125.9	0.90	85.8	99.4	100.0	90.8	198.9	0.46
27	82.6	95.6	100.0	133.3	165.4	0.81	81.5	94.4	100.0	113.0	124.1	0.91	84.8	98.2	100.0	93.8	204.5	0.46
29	81.4	94.3	100.0	135.3	166.0	0.82	80.3	93.0	100.0	112.2	122.1	0.92	83.8	97.0	100.0	96.7	209.6	0.46
31	80.2	92.9	100.0	137.0	166.3	0.82	79.0	91.5	100.0	111.1	119.9	0.93	82.8	95.8	100.0	99.5	214.4	0.46
33	79.1	91.6	100.0	138.3	166.3	0.83	77.7	90.0	100.0	109.7	117.5	0.93	81.7	94.7	100.0	102.1	218.9	0.47
35	77.9	90.3	100.0	139.4	166.0	0.84	76.5	88.5	100.0	108.1	115.0	0.94	80.7	93.5	100.0	104.6	223.1	0.47
37	76.8	88.9	100.0	140.2	165.6	0.85	75.2	87.1	100.0	106.4	112.4	0.95	79.8	92.4	100.0	107.0	227.0	0.47
39	75.7	87.6	100.0	140.8	164.9	0.85	74.0	85.6	100.0	104.5	109.7	0.95	78.8	91.2	100.0	109.2	230.6	0.47
41	74.6	86.4	100.0	141.2	164.1	0.86	72.7	84.2	100.0	102.6	107.0	0.96	77.9	90.2	100.0	111.4	233.9	0.48
43	73.5	85.1	100.0	141.4	163.2	0.87	71.5	82.8	100.0	100.6	104.4	0.96	76.9	89.1	100.0	113.4	237.0	0.48
45	72.4	83.9	100.0	141.4	162.1	0.87	70.3	81.5	100.0	98.6	101.8	0.97	76.0	88.1	100.0	115.4	239.8	0.48

Fuente: Elaboración propia